



Philippe Colliard
[Qui je suis](#)

TOUS les réels de la droite ?

En travaillant sur une graduation géométrique d'une droite d dont à l'origine tous les points étaient « éteints », [l'épisode 5](#) en avait « allumé » les points-entiers (à l'aide d'un robot-arpeur) et [l'épisode 6](#) les autres points-rationnels (à l'aide des harpes de Thalès).
J'avais conclu cet épisode 6 par :

Avons-nous achevé d'allumer la droite ?

Non, loin de là (et vous le savez, bien sûr) mais comme le dirait Kipling, ceci est une autre histoire : les points et les nombres irrationnels apparaîtront en temps voulu... et ce temps est encore loin (je ne voudrais pas être désobligeant pour eux mais pour l'instant nous pouvons tout à fait nous en passer)

Le temps est enfin venu d'enrichir cet éclairage de la droite, d'en allumer **quelques** points irrationnels. Pourquoi maintenant ? Parce que [l'épisode 12](#) (les spectres) et [l'épisode 13](#) (le théorème « de Pythagore ») m'ont apporté les deux outils qui me manquaient encore pour m'y atteler.

Après les harpes de Thalès, l'escargot de Pythagore :

Bon, ce n'est pas une construction bien compliquée, n'est-ce pas ?

Je commence par construire le triangle ABC, rectangle en B et dont les côtés [AB] et [BC] mesurent tous les deux 1 unité de longueur. Quelle unité ? Ça n'a aucune importance 😊

Ensuite je construis le triangle ACD, rectangle en C, puis le triangle ADE, rectangle en D...

Pour chaque nouveau triangle le côté bleu a la même longueur que [AB] et [BC] : les segments bleus mesurent **tous** 1 unité de longueur.

Ça va, je ne fais pas trop de maths ?

– Non, non, ça va... enfin... pour l'instant ?
En fait, vous dites que tous les segments bleus sont congruents ?

Bien joué ! Avouez que vous venez de relire l'épisode 5 ?
Et maintenant on va s'intéresser aux segments rouges : qu'est-ce que nous pouvons raconter à leur sujet ?

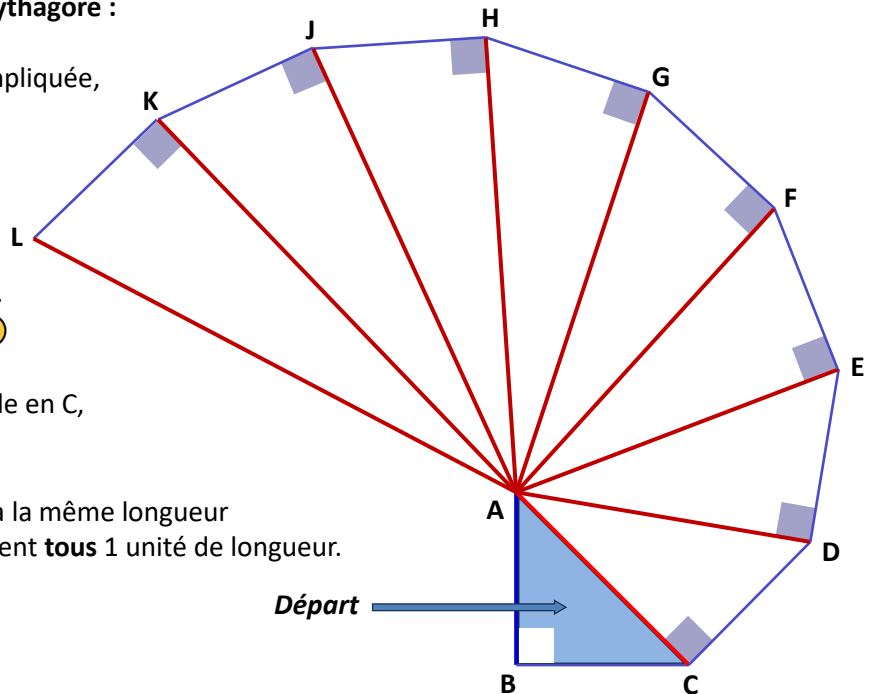
– Bon, ça c'est facile : dans l'intro vous avez écrit que vous avez besoin de « Pythagore » et dans votre construction, il y a des triangles rectangles partout ! Alors on peut calculer les carrés des longueurs de tous ces segments :
 $AC^2 = AB^2 + BC^2$, donc $AC^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2$... et voilà : $AC^2 = 2$ c'est ça ?

C'est tout à fait ça 😊 !

Et $AD^2 = AC^2 + CD^2$ donc $AD^2 = 2 + 1^2 = 2 + 1 = 3$... $AE^2 = AD^2 + DE^2$ donc $AE^2 = 3 + 1^2 = 3 + 1 = 4$
et ça continue comme ça avec les autres triangles : $AF^2 = 5$ $AG^2 = 6$ $AH^2 = 7$ $AJ^2 = 8$ $AK^2 = 9$ $AL^2 = 10$...

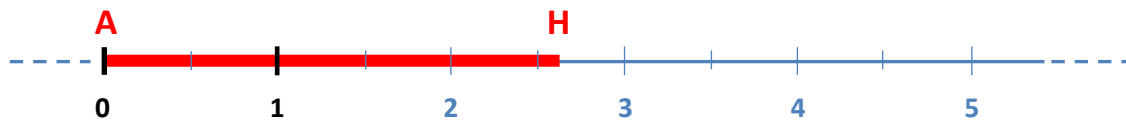
L'escargot de Pythagore permet de construire des segments dont les carrés des longueurs sont les entiers positifs. Mais les longueurs de ces segments, qu'est-ce qu'on peut en dire ?

– Déjà pour les segments [AE] et [AK] c'est simple : la longueur de [AE] c'est 2 unités et celle de [AK] c'est 3 !



Oui, bien sûr... Mais *les autres* segments, quelles sont leurs longueurs ? Nous savons qu'elles existent, puisque ces segments existent (je viens de les construire) !

Je vais poser la question autrement... et pour ne pas nous embrouiller la tête avec des segments partout, je vais en prendre un seul, par exemple [AH] : je le reporte sur une demi-droite positive, graduée avec l'unité de longueur qui m'a servi pour l'escargot et en plaçant A à l'origine de cette demi-droite...



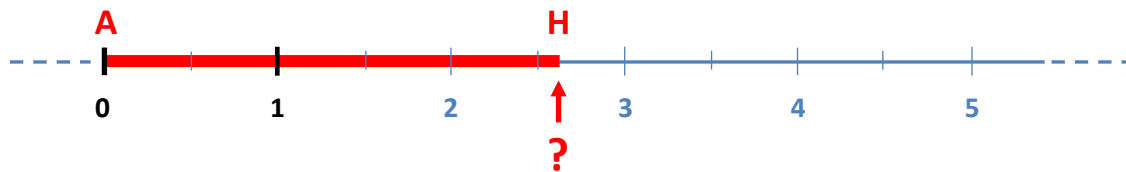
– Ah non ! Vous nous avez bien dit qu'un segment c'est un endroit et qu'on ne peut pas le déplacer... alors vous ne pouvez pas bouger A !

Oups, oui c'est vrai. Ce que je dessine sur la droite c'est un autre segment. Mais comme il a la même longueur que [AH] et que c'est un dessin différent, « ailleurs », j'ai pris la liberté de l'appeler lui aussi [AH]. C'est un abus d'écriture mais ça ne vous dérange pas vraiment, si ?

– Non, c'était juste pour être désagréable 😊 !

Bon, une petite pause de temps en temps... on revient à nos segments ?

Maintenant je vais pouvoir remplacer « quelle est la longueur de [AH] ? » par une autre question. Laquelle ? Il n'y a pas de piège, c'est *vraiment* une question facile, regardez je vais même vous aider :



– Ah oui : quelle est l'abscisse de H ? C'est ça ?

Oui, c'est ça, bien sûr... mais de quel « H » vous parlez, là : du noir ou du rouge ?

– Ça y est, vous vous vengez... c'est pas très fair-play !

Désolé, ça m'a échappé ! Bon, cette abscisse, c'est clairement un nombre entre 2,5 et 3. Alors une nouvelle question : est-ce que H (le H rouge 😊 !) fait partie des points de la droite déjà « allumés » par les harpes de Thalès... ou est-ce qu'en « reportant » [AH] sur la droite, c'est nous qui venons de l'allumer ?

Ou si vous le préférez : est-ce que c'est un nombre rationnel... ou un nombre d'une nouvelle espèce ?

– Bon, si on se sert de vos harpes de Thalès pour créer des graduations de plus en plus fines de la droite, si au lieu de séparer le segment unité en 2 comme vous l'avez fait on le sépare en 20, ou en 50, ou en 350 000... on finira bien par tomber exactement sur H, non ?

Eh bien non, l'ensemble des points rationnels est tout troué, c'est une passoire... mais bien sûr, ce n'est pas avec les harpes de Thalès qu'on peut s'en rendre compte. Les harpes sont un bel outil mais il ne peut faire que ce qu'il a été conçu pour faire : ce serait injuste de demander aux harpes d'allumer des points qu'elles ne peuvent pas atteindre !

– Bon, nous on veut bien vous croire, enfin... peut-être ! Mais comment vous faites pour nous convaincre vraiment ? Vous allez créer un nouvel outil ?

D'abord je ne crée rien du tout, je ne fais qu'utiliser des outils créés par d'autres, de vrais mathématiciens, eux... mais oui, bien sûr, je vais devoir utiliser d'autres outils (relisez l'intro ?) et j'ai commencé avec « Pythagore », en faisant apparaître des segments de la droite graduée dont *je sais* qu'une extrémité (C, D, F, G, H, J, L) échappera aux harpes ! Dont *je sais*... mais maintenant il me reste à vous en convaincre ! Ça, c'est avec le deuxième outil. On y va ?

Tout d'abord, une précision... :

depuis le début de l'épisode j'utilise des périphrases insupportables, comme « *le carré de la longueur de [AH] est 7* » alors que ce qui m'intéresse vraiment ce sont les longueurs, pas leurs carrés. Donc, évidemment, je préférerais écrire directement « *la longueur de [AH] est...* ». Mais à part les (rares) cas où le carré de cette longueur est un « carré parfait » (le carré d'un nombre entier) comme 4 ou 9, ou une fraction dont le numérateur *et* le dénominateur sont des carrés parfaits, *je ne sais pas écrire* ce nombre. Je ne sais même pas encore s'il est rationnel ou pas !

et une convention d'écriture... que vous connaissez tous :

heureusement, les mathématiciens ont inventé il y a très longtemps le symbole $\sqrt{\quad}$, qui signifie exactement ça :

le nombre (positif) dont le carré est 7 s'écrit $\sqrt{7}$... et il se lit « racine carrée de 7 » (oui, je sais que vous le savez 😊 !)

Pourquoi « positif » ? Parce qu'un nombre et son opposé ont le même carré, donc comme $\sqrt{7}$ ne doit pas pouvoir représenter 2 nombres différents (*), on a décidé qu'il représenterait le positif. Évidemment, dans le cas de 0 on n'a pas eu besoin de choisir !

(*) Les maths sont tout de même un peu moins tordues que la physique quantique !

Pourquoi « racine carrée » ? Peut-être parce qu'à l'origine de l'aire d'un carré se trouve la longueur d'un côté de ce carré : par exemple 5 serait « à l'origine de » 25... « à la racine » de 25.

(Le symbole $\sqrt{\quad}$ semble avoir été inventé par le mathématicien allemand Christoff Rudolff, vers 1525 : ce serait peut-être une stylisation de la lettre « r » – du latin « radix », pour « racine » ?)

Pourquoi le nombre $\sqrt{7}$ n'est-il pas un nombre rationnel ?

Non, ne vous attendez pas à un cours, ici je *raconte* les maths, je ne les démontre (presque) pas !

L'explication repose sur le deuxième outil que j'ai mentionné en intro, le « *spectre d'un entier* » que je raconte dans [l'épisode 12](#)... et si vous le voulez bien je vais supposer que vous avez lu cet épisode !

– Euh...on a le choix ?

Bon, en fait... pas vraiment 😊 ! Et malgré ce que je viens d'écrire, je vais tout de même faire un tout petit peu de maths, mais promis, le moins possible : au départ je vais supposer que $\sqrt{7}$ est un nombre rationnel mais vous allez voir que ça va m'envoyer droit dans un mur !

Si $\sqrt{7}$ est rationnel il existe deux entiers a et b tels que $\sqrt{7} = a/b$
donc tels que $7 = (a/b)^2 = a^2/b^2$
et re-donc tels que $7 \times b^2 = a^2$!

Et c'est là que ça cloche : pour construire le spectre du produit de deux nombres, vous augmentez le spectre de l'un des nombres de tous les éléments du spectre de l'autre (indexés à leur suite), donc **dans le spectre du carré d'un entier, tous ses éléments sont doublés : ils apparaissent en nombres pairs !**

Juste sur un exemple : prenez 90 ... son spectre est $\{2a, 3a, 3b, 5a\}$: $90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$
et $90^2 = 90 \times 90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5$
donc le spectre de 90^2 est $\{\underbrace{2a}_2, \underbrace{2b}_2, \underbrace{3a}_4, \underbrace{3b}_4, \underbrace{3c}_4, \underbrace{3d}_4, \underbrace{5a}_2, \underbrace{5b}_2\}$!

Donc encore, si le spectre de b^2 contient des 7, il en contient un nombre pair. Et comme le spectre de 7 est $\{7a\}$, celui de $7 \times b^2$ contient un nombre impair de 7 : le nombre pair de 7 du spectre de b^2 (éventuellement 0) **plus 1** !

Mais alors $7 \times b^2$ ne peut pas être le carré d'un entier : $7 \times b^2 = a^2$ n'est pas possible !

Et voilà, dans le mur 😊 : $\sqrt{7}$ est un nombre « irrationnel » (n'est pas un nombre rationnel) ! Joli, non ?

– Oui, bon, lorsqu'un nombre entier n'est pas un carré parfait, sa racine carrée est un nombre irrationnel. C'est ça ?

Oui, c'est tout à fait ça. Et si vous retirez de l'ensemble des entiers naturels tous les carrés parfaits il reste tout de même encore un ensemble infini d'entiers naturels... et donc un ensemble infini de racines carrées irrationnelles ! Et ce n'est pas fini ! (Oups un jeu de mot tout à fait involontaire mais je le garde 😊 !)

– Comment ça, pas fini ? Il y a d'autres nombres irrationnels ?

Des tonnes ! Rien qu'avec les racines carrées irrationnelles d'entiers vous pouvez construire une infinité d'infinités d'autres irrationnels. Par exemple le produit d'un nombre entier (non nul) par un irrationnel est un irrationnel alors à partir de $\sqrt{7}$ je peux construire le produit de 2 par $\sqrt{7}$, qu'on a décidé d'écrire $2\sqrt{7}$, puis $3\sqrt{7}$, $4\sqrt{7}$...

Mieux encore, le produit d'un nombre *rationnel* (oui, à l'exception de 0 !) par un irrationnel est encore un nombre irrationnel : $\frac{13}{3} \times \sqrt{7} = \frac{13}{3}\sqrt{7}$! (à gauche l'opération, à droite le nom qu'on a créé pour son résultat)

Une infinité de rationnels, et pour chacun d'eux une infinité de racines carrées irrationnelles d'entiers, ça fait bien une infinité d'infinités, non ?

Et ça ne s'arrête pas aux racines carrées : la racine cubique d'un entier dont le spectre ne contient pas que des triplets d'éléments premiers est encore un nouvel irrationnel... avec sa propre infinité d'infinités d'irrationnels !

– Et les racines 4^e d'entiers dont les spectres ne contiennent pas que des quadruplets etc. ?

Bravo ! Bon, comme 4 est un multiple de 2 il va y avoir des doublons mais on ne va pas chicaner. Vous voyez, avec les racines 5^e, 6^e, 7^e ... on en est à une infinité d'infinités d'infinités !

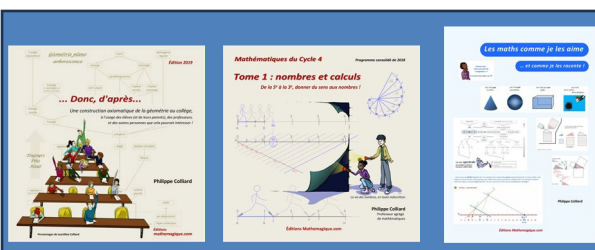
Et chaque nouvelle infinité d'irrationnels allume une nouvelle infinité de points de notre droite graduée !

– Oufff ! Alors, ça y est, maintenant on a enfin allumé toute la droite ?

Euh, je sens que je vais vous décevoir : non, on a juste fait un petit pas en avant, un pas... minuscule 😞 :

tout comme les « harpes de Thalès », les spectres ont leurs limites : ils débusquent ce que les mathématiciens appellent les « irrationnels algébriques » mais ils laissent échapper une infinité bien plus vaste, celle des « irrationnels transcendants » (ils ne sont pas du tout équipés pour les atteindre).

Ce sera pour une autre fois ?



Je souhaite avant tout partager : en cliquant sur les couvertures vous accédez (entre autres) à de nombreux extraits de mes livres !

Oui, c'est gratuit... et non, il n'y a aucun piège commercial, aucune demande de renseignements.

Si toutefois vous cherchez à acheter un de ces livres, [cliquez ici](#).