Philippe Colliard
Qui je suis

Les maths comme je les aime /13

Oh nooon, pas Pythagore ! 🥱😴

Ce texte est une variation très libre de l'article « le goût des maths » que j'ai publié sur le site « images des mathématiques (CNRS) ».
*Une **variation** très libre : la démonstration du théorème de Pythagore sur laquelle cet épisode s'appuie n'est plus celle d'Euclide mais celle de György Pólya (les deux partent toutefois de la même réflexion fondamentale « évidente »).*
*Une variation **très libre** : ici je n'écris pas des maths, je les effleure : **je les raconte… comme je les aime** 😊. Et comme je voudrais les partager avec vous. Mais bien sûr, fondamentalement ce sont les mêmes maths.*

*– Vous appelez ça « **raconter** » les maths ? Le théorème de Pythagore ?? Le carré de l'hypoténuse bla-bla-bla ???*

Euh… « le carré de l'hypoténuse bla-bla » c'est *énoncer* le théorème de Pythagore, pas *le raconter* donc non, ce n'est pas du tout ce que j'ai en tête : je voudrais creuser avec vous *sous* le théorème, imaginer l'étincelle qui a pu conduire Euclide et Pólya à le démontrer.

Pourquoi eux ? Euclide parce qu'il semble être le premier à avoir démontré ce théorème et Pólya parce que je trouve sa démonstration merveilleusement limpide. Et parce qu'ils sont partis *de la même idée* – même si leurs chemins diffèrent ensuite rapidement – et je me suis longtemps demandé comment elle leur était venue.

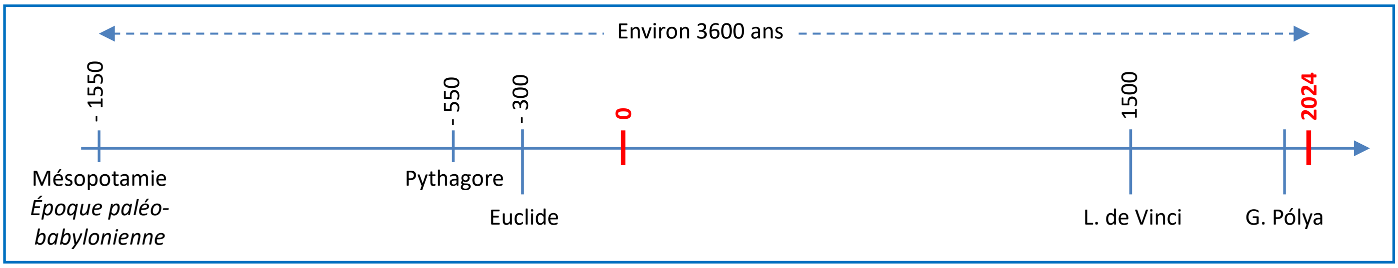
Et aussi parce que je voudrais vous entendre, à la fin de ces pages, vous exclamer « *bon sang mais c'est bien sûr !* » (comme Charolles, l'adjoint du commissaire Bougret dans la rubrique-à-brac de Gotlib – ça ne me rajeunit pas !) Parce qu'en réalité ce théorème, c'est une évidence quand on tire sur le bon fil pour le détricoter. 😊😊

– Une évidence ? Vous êtes sûr ? Mais alors pourquoi on en parle tout le temps ?

Ça, c'est une autre histoire… peut-être parce qu'il est extrêmement utile ? Et puis en vrai j'exagère un tout petit peu : chacun des éléments sur lesquels s'appuie la démonstration de Pólya *est* une évidence mais avoir pensé à eux, les avoir tous reliés, ça, ce n'est une évidence… qu'après coup !

– Eh, attendez ! Pourquoi vous nous parlez toujours d'Euclide ou de Pólya ? C'est le théorème « de Pythagore », non ?

Oui, enfin il est le premier à qui on l'ait associé mais des tablettes d'argile découvertes en Mésopotamie montrent que cette « règle » entre les côtés d'un triangle rectangle était déjà connue 1000 ans plus tôt… et de toute façon ni Pythagore ni les Mésopotamiens ne semblent l'avoir démontrée. La première démonstration connue, c'est bien Euclide qui l'a écrite. Bon, une chronologie rapide, ça vous dit ?



(L'échelle est respectée mais les dates sont évidemment approximatives)

Alors théorème « de Pythagore », c'est euh… un peu injuste !

– Non, pas « un peu », c'est « complètement » injuste !

C'est vrai. Mais comme il est un peu tard pour rendre à Euclide ce qui n'est pas à Pythagore, je vous propose un arrangement entre nous : je dis « … de Pythagore » et vous pensez « … cité par Pythagore et démontré par Euclide ». Ça vous va ?

– Oui d'accord… mais c'est quand même injuste ! Et Pólya alors, qu'est-ce qu'il vient faire là-dedans ?

Il a inventé une autre démonstration du théorème, encore plus belle – à mon avis – que celle d'Euclide. Mais c'est juste mon avis et de toute façon d'après ce qu'en dit **Andrés Navas** dans cet article d'*images des mathématiques* il existe maintenant plus de 120 démonstrations différentes du théorème (dont celle d'Andrés 🙂) !

– Tout ça ?!? Alors Léonard de Vinci aussi ? C'est pour ça que vous le mettez dans votre chronologie ?

Eh bien en fait non : je l'y ai mis parce que dans un carnet de croquis il a illustré la démonstration d'Euclide et qu'il y a bien mis en évidence une droite (en fait un segment de droite) qu'on retrouve dans la démonstration de Pólya et qui m'a longtemps intrigué… et aussi pour être honnête parce que la Bibliothèque de l'Institut de France m'a très courtoisement autorisé à utiliser ce dessin 😊.

– Une droite qui vous a intrigué ? Une droite, c'est une droite, non ?

D'accord, d'accord… ce n'est pas la droite qui m'a intrigué, c'est « pourquoi elle » ? Comme vous l'avez dit pour Pólya : qu'est-ce qu'elle vient faire là-dedans ?
Bon, vous voulez bien qu'on reprenne à zéro ? Promis, ***juste en racontant***, avec des dessins et quelques idées !

– Promis ? Alors d'accord !

C'est parti ! « Le carré de l'hypoténuse bla-bla », c'est le début d'une règle connue depuis 3600 ans :

dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est la somme des carrés des deux autres côtés.

(Bien sûr certainement pas énoncée comme ça !)

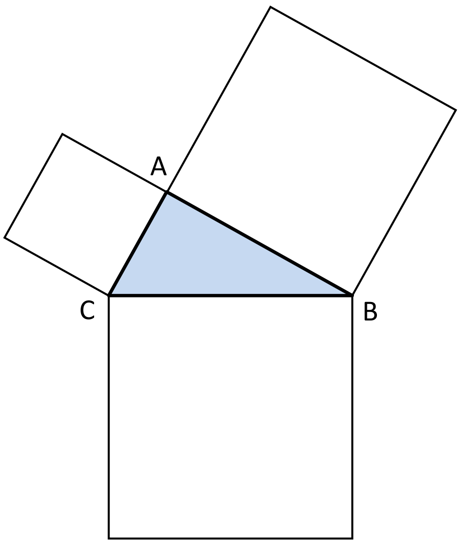
L'hypoténuse, c'est le côté en face de l'angle droit et « le carré de l'hypoténuse » vous pouvez l'interpréter

… comme un nombre : « le carré (la puissance 2) de la longueur de l'hypoténuse »,

… ou comme un polygone : « le carré dont l'un des côtés est l'hypoténuse ».

Et pareil pour « les carrés des deux autres côtés » !

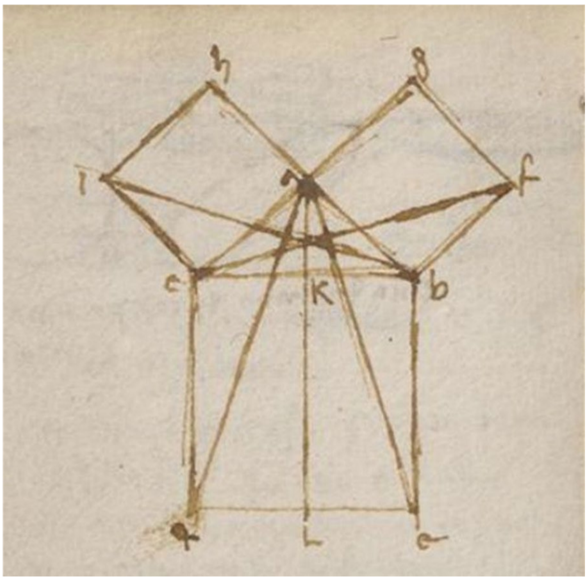
Si vous pensez aux carrés-polygones, vous allez vouloir les faire apparaître et c'est ce que Euclide, Léonard de Vinci et Pólya ont fait :



Euclide et Pólya

(ABC est rectangle en A)

Pour chaque côté il y a toujours deux carrés possibles : l'un tourné vers l'extérieur, l'autre replié sur le triangle. Mais trois carrés repliés sur le triangle, ça aurait vraiment fait fouillis !



Léonard de Vinci, manuscrit K

(Courtoisie de la Bibliothèque de l'Institut de France pour mon article « Le goût des maths »)

Mais qu'est-ce que ça pourrait bien vouloir dire, la « *somme des carrés des deux autres côtés* » ?

Eh bien, de la même façon que

… dans l'interprétation *numérique* de la situation,
« le carré de l'hypoténuse » est un raccourci – un abus de langage – pour « le carré **de la longueur** de l'hypoténuse »,

… dans l'interprétation *géométrique*,
la « somme des carrés (*les polygones*) » est un raccourci pour la « somme **des aires** de ces carrés ».

<u>Finalement le théorème dit :</u> ***<u>l'aire du carré associé à l'hypoténuse est la somme des aires des deux autres carrés</u>*** *!*

Vous pouvez vous représenter cette interprétation géométrique comme ça, par exemple :

la quantité de peinture nécessaire pour recouvrir le carré-hypoténuse
est la somme des quantités de peinture nécessaires pour recouvrir les deux autres carrés

(L'aire d'un carré est un nombre, la mesure de sa surface – et ce nombre est bien « le carré de la longueur d'un côté », non ?)

Ça va, là ? Je ne « fais » pas trop de maths ?

Alors je continue ! Regardez à nouveau
la figure de départ commune à Euclide et à Pólya :

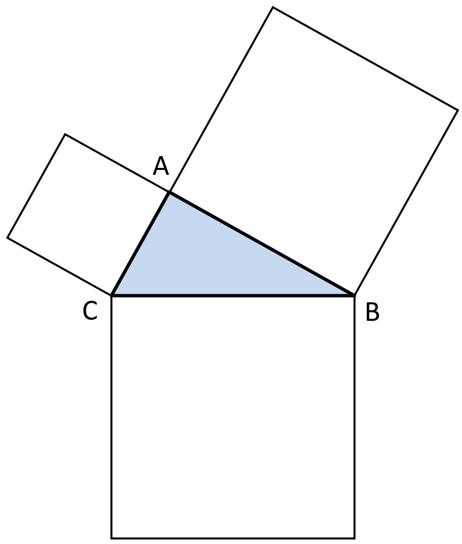
Vous y voyez la démonstration du théorème « de Pythagore » ?
Vous allez vous exclamer « bon sang mais c'est bien sûr » ?

Je ne crois pas, non !

Et pourtant il suffira d'ajouter un simple segment de droite
pour que cette figure prenne vie :

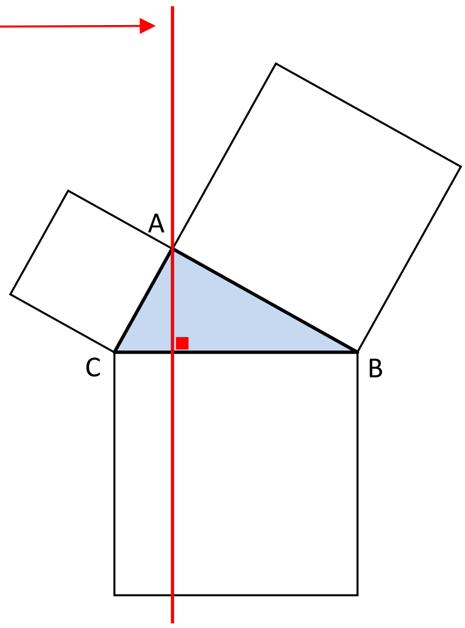
un tout petit segment pour Pólya,
un segment un peu plus grand pour Euclide,

mais deux segments ***de la même droite***,



ABC est rectangle en A.

la perpendiculaire à (BC) passant par A →



Pourquoi elle ?

Pas « pourquoi » dans le sens « *en quoi est-elle utile à la démonstration* »,
mais dans le sens « *qu'est-ce qui a imposé cette droite dans leur tête* » ?
Qu'est-ce qui les a *poussés* à penser à cette droite ?

Parce que cette droite, c'est vraiment le déclic,
c'est l'événement logique fondamental, incontournable.

Malheureusement ni Euclide ni Pólya ne s'est auto-analysé.
(Ou si l'un ou l'autre l'a fait, il ne l'a pas fait savoir !)

Alors faute de mieux j'ai essayé de « me mettre à leur place »,
de regarder le dessin et de « penser comme eux »…
sauf que bien sûr, je ne suis PAS eux ☹ !

– Nooon ?

C'est ça, c'est ça, enfoncez le clou ! Mais je pouvais toujours essayer ? J'ai fini par trouver une possibilité d'explication, rien de plus qu'une possibilité, évidemment : l'un ou l'autre a peut-être eu des raisons de penser à cette droite qui échappent à mes capacités.

Mais qu'importe, une *possibilité* d'explication est toujours mieux que rien !

Celle-ci repose sur une symétrie *logique* dans la figure de départ – et d'ailleurs aussi dans l'affirmation qu'ils voulaient démontrer (*le carré de l'hypoténuse est la somme des carrés des deux autres côtés*) :

dans la figure, **les sommets B et C sont indiscernables, tout comme le sont « les deux autres côtés » ou leurs carrés.**

– Euh… vous pourriez nous dire ça en français ?

Oui, bon… ça veut dire qu'au lieu d'écrire « *les sommets* B *et* C » je pourrais écrire « *les sommets qui ne sont pas* A », ou « *les deux autres sommets* » (pas celui de l'angle droit) !

Vous comprenez, B et C sont des sommets siamois :
peu importe lequel est qui, on n'a jamais à les séparer donc on n'a jamais besoin non plus de les distinguer.

Et c'est pareil pour « *les deux autres côtés* » (pas l'hypoténuse) et « *les deux autres carrés* » (pas associés à l'hypoténuse) !

Alors si on veut rajouter un élément à la figure – et on en a besoin pour construire une démonstration – cet élément **doit** respecter cette indiscernabilité entre « *les deux autres…* » : on ne peut pas l'autoriser à les singulariser, à apporter plus d'importance à l'un qu'à l'autre, à les identifier séparément - que ce soient les sommets, les côtés ou les carrés.

Et si c'est une droite que nous voulons rajouter, la seule qui « ne penchera pas plus d'un côté que de l'autre », qui continuera à respecter l'incognito individuel des éléments siamois, c'est celle que j'ai indiquée.

– Oui, bon, d'accord, ça doit être une droite qui passe par A et elle ne peut pas être euh, oblique… mais pourquoi pas celle qui passe par A et qui est parallèle à (BC) ?

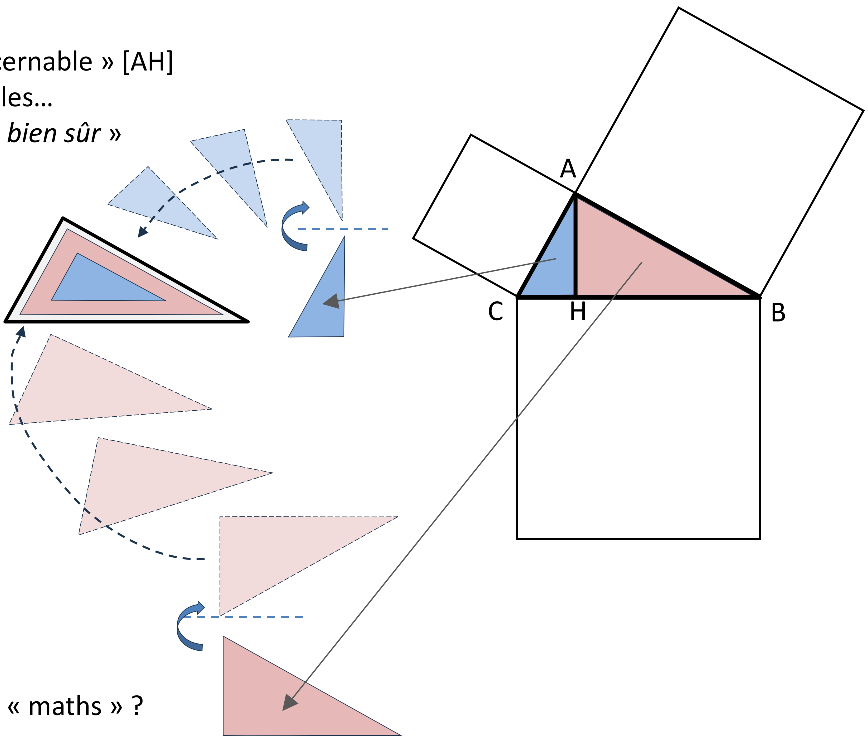
Parce qu'elle doit séparer la figure en deux figures siamoises, pour conserver l'aspect « siamois » de la propriété : d'un côté de votre droite il y aurait juste deux morceaux de carrés… et de l'autre côté tout le reste !

– Ah oui, d'accord. Alors les segments de Pólya et d'Euclide, ce sont lesquels ?

Celui de Pólya va de A à la base du triangle et celui d'Euclide continue jusqu'à la base du grand carré (le segment [AL] de L. de Vinci). Mais on va laisser Euclide de côté, si vous le voulez bien : sa démonstration est un peu moins évidente que celle de Pólya… mais si elle vous intéresse vous la trouverez (entre autres bien sûr 🙂) dans « le goût des maths ».

Bon c'est parti pour quelques dessins :

La figure de Pólya avec son segment « indiscernable » [AH]
sépare ABC en deux autres triangles rectangles…
avec déjà un début de « *bon sang mais c'est bien sûr* »
parce que les triangles bleu et rouge
sont des réductions de ABC
(ils ont tous les trois les mêmes angles).



C'est ce qu'on appelle
des « figures semblables » :

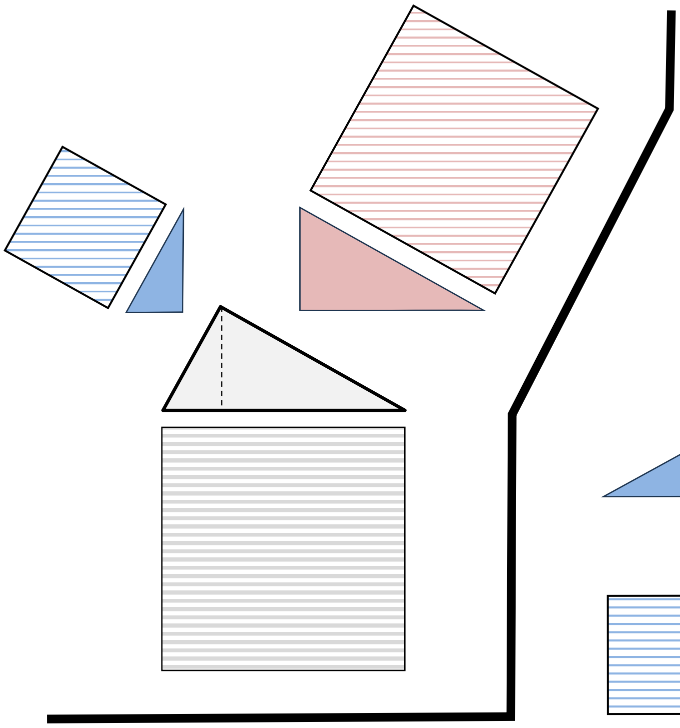
si par exemple l'hypoténuse de ABC
était 2 fois plus grande que celle
du triangle rose et 3 fois plus grande
que celle du bleu,
chacun des deux autres côtés de ABC
serait 2 fois plus grand que le côté
correspondant du rose – et 3 fois plus grand
que celui du bleu.

Ça va, vous suivez… ça fait toujours pas trop « maths » ?

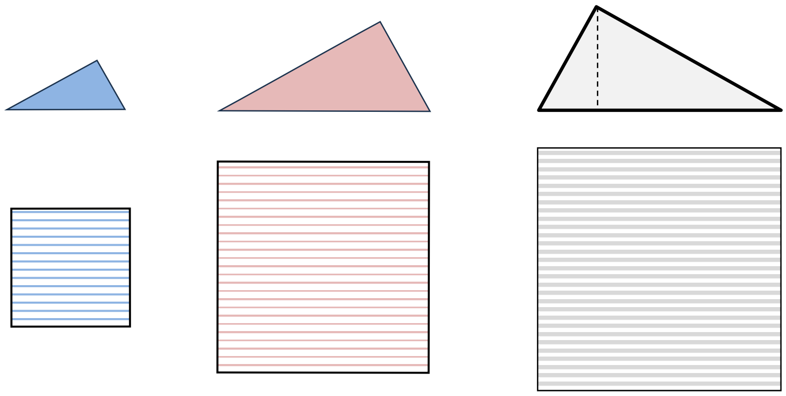
– Non non, ça va mais on ne voit pas trop le lien avec « Pythagore »… enfin, « cité par Pythagore ». Le « bon sang mais c'est bien sûr ! », c'est pas encore pour tout de suite !

Pas grave, vous verrez, ça va venir !

Maintenant, je vais hachurer les carrés avec la couleur du triangle associé
puis « éclater la figure » …



… et enfin ranger les triangles et leurs carrés
du plus petit au plus grand :



Et c'est fini !!!

*– **QUOI ?** Comment ça, c'est fini ? ?*

Oui, bon, j'exagère un petit peu, ça n'est pas *vraiment* fini… mais si vous voulez creuser jusqu'au bout, je vais quand même devoir faire un tout petit peu de maths, pas seulement les raconter. Vous voulez ?

– Si c'est vraiment un tout petit peu, d'accord vous pouvez essayer !

Bon, regardez le triangle bleu et le triangle rose : puisqu'ils sont semblables, si je décide d'agrandir (sans le déformer !) le triangle bleu jusqu'à ce que son hypoténuse ait la même longueur que celle du triangle rose je vais avoir une copie de ce triangle rose, n'est-ce pas ?
Et qu'est-ce qui va arriver au carré bleu ? Et bien comme ses côtés ont la même longueur que l'hypoténuse du triangle bleu, lui aussi il va être agrandi jusqu'à devenir une copie du carré rose !

Mais dans cet agrandissement *le rapport entre l'aire du triangle et celle du carré ne change pas*.
Pourquoi ?

Juste sur un exemple, d'accord ?

Parce qu'une aire est un produit de deux longueurs :
si en agrandissant le triangle et le carré bleus je multiplie par 3 les longueurs de tous leurs segments, je multiplie entre autres par 3 les deux longueurs qui servent à calculer leurs aires…
et ces aires seront donc multipliées par 9 : (3 × la première longueur) × (3 × la deuxième longueur).

<u>*Les deux aires*</u> donc si au début l'aire du carré était 2 fois plus grande que celle du triangle, après elle le sera encore !

Voilà, maintenant c'est vraiment (presque) fini 😁 !

Nous savons que l'aire du grand triangle est la somme des aires des deux petits triangles (puisque les deux petits triangles recouvrent exactement le grand),

et maintenant nous savons également que pour les trois couleurs on passe de l'aire du triangle à celle du carré en multipliant l'aire du triangle par le même nombre… bon, je l'appelle ***fc*** (pour « facteur commun ») :

aire du triangle bleu	+	aire du triangle rose	=	aire du triangle gris
↓ × ***fc***		↓ × ***fc***		↓ × ***fc***
(aire du triangle bleu) × ***fc***	+	(aire du triangle rose) × ***fc***	=	(aire du triangle gris) × ***fc***

Donc : aire du carré bleu + aire du carré rose = aire du carré gris

Et voilà : ***<u>l'aire du carré associé à l'hypoténuse est bien la somme des aires des deux autres carrés</u>*** ! Alors ???

– Alors… bon, d'accord, vous avez gagné : ***bon sang mais c'est bien sûr !*** 😊

En fait le théorème de Pythagore, il dit juste que si deux petits triangles recouvrent un grand triangle, l'aire du grand est la somme des aires des deux petits, c'est ça ? 🤣😂🤣

Vous êtes insupportable(s) …

À bientôt ?