Philippe Colliard
[Qui je suis](#)

Les maths comme je les aime /11

À l'origine des angles

« À l'origine » parce qu'avec les vecteurs, les surfaces gauches, les géométries sphérique, elliptique, hyperbolique… les choses se sont rapidement corsées.
Mais également « à l'origine » parce qu'une fois inventés les concepts de point, droite et plan l'angle était inévitable.

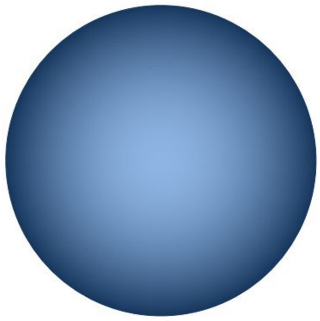
Remontons le temps : l'humanité vient de découvrir la géométrie, cet univers hyper simplifié qui se passe dans notre tête. Un univers de points, de lignes, de surfaces et de « solides » qui ne le sont pas, un univers d'endroits.

– Attendez, pourquoi vous dîtes « hyper simplifié » ? Vous le trouvez simple, vous ?

Non, mais comparé à notre univers physique c'est un jouet de bambin(e)s… mais j'en ai déjà parlé dans l'épisode précédent ([*Nous avons tou(te)s besoin d'espace !*](#)), je ne voudrais pas vous donner l'impression de radoter !

Toutefois, même hyper simplifié cet univers est illimité et là, ça me pose un problème parce qu'illustrer des concepts illimités par des dessins qui ne le sont pas, c'est un peu compliqué !
Alors je vais imaginer que j'arrive à voir cet univers « du dehors » comme une sorte de boule dont je ne ferais pas partie (et non, ne me demandez pas OÙ je serais, d'accord ! Ni où VOUS seriez !)

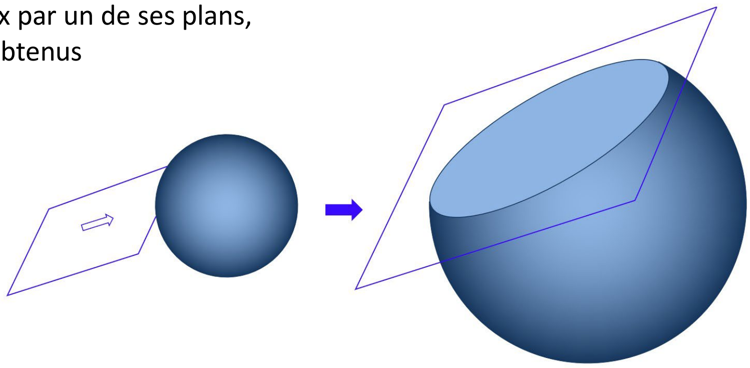
Imaginons donc notre univers de points vu de loin : il ressemble à cette boule (parce qu'en plus ses points sont bleu : comment et par quoi un endroit peut-il être coloré ? Ça, c'est le pouvoir de l'imagination !)



Et cette boule immense, nous allons lui infliger trois coupes, la trancher comme un amateur de pierres semi-précieuses trancherait une géode pour la libérer de sa gangue et en faire apparaître le quartz ou l'agate qu'elle dissimule.

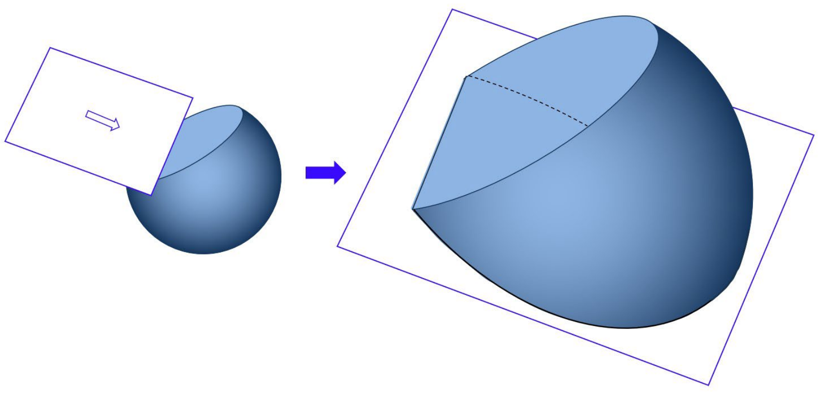
Tranchons donc notre univers, coupons-le en deux par un de ses plans, et ne gardons que l'un des deux univers partiels obtenus
– par exemple en décolorant les point de l'autre !

Un plan de points ne peut pas sortir de son univers, donc ce dessin est absurde…
mais il reste cohérent dans son absurdité :
si nous pouvons observer l'univers du dehors pourquoi ne pourrions-nous pas en extraire très provisoirement le plan qui nous intéresse, juste le temps d'un dessin ?



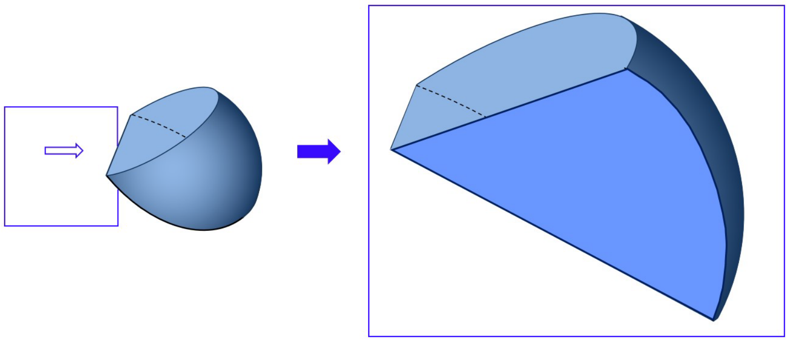
Puis tranchons à son tour cet univers partiel en le coupant par un autre plan (mais **pas** un plan parallèle au premier !)… et n'en gardons encore qu'une des deux parties :

l'ensemble des points de ce nouveau morceau d'univers (le « solide » qui nous reste) s'appelle un « angle dièdre ».



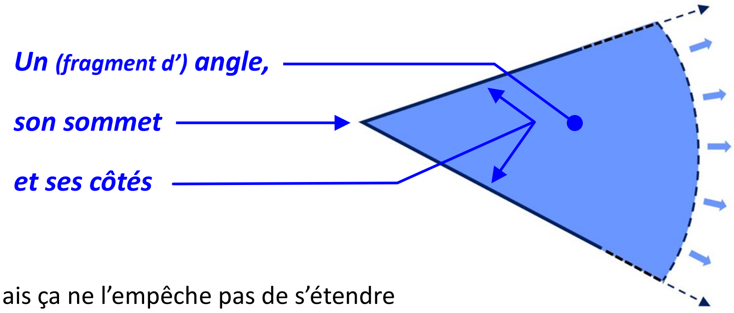
Les « vrais angles » ne sont plus très loin !

Une dernière coupe – selon un plan qui n'est parallèle à aucun des deux plans précédents, une dernière partie de notre univers écartée (décolorée) et l'angle tel que nous le connaissons nous apparaît enfin :



la tranche bleu vif des points communs à ce qui nous reste d'univers et au plan de coupe qui en est maintenant une frontière.

Bon, traiter un univers de gangue et le trancher comme je l'ai fait n'est pas très respectueux, même lorsque cet univers est imaginaire et que ses éléments ne sont que des endroits.
En même temps, un univers est suffisamment vaste pour pouvoir se permettre d'être magnanime !



Et à propos de vaste, un angle l'est également :
bien sûr, il est coincé entre deux demi-droites (ses côtés) mais ça ne l'empêche pas de s'étendre avec elles – et entre elles – vers le « bout de l'univers »… toujours un peu plus loin 😊

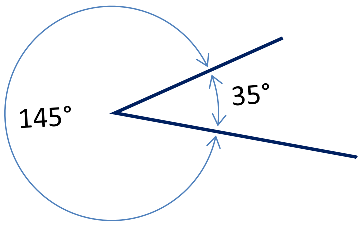
– Mais là vous dites qu'un angle est une surface, alors ? Pas juste la ligne formée par ses côtés ?

Bon, comment dire… en fait le problème c'est qu'il y a deux écoles de pensée, l'une qui donne la priorité aux frontières et l'autre aux territoires :

L'une définit un angle comme (la ligne formée par) « deux demi-droites de même origine »,
et l'autre comme « surface plane (ou : partie du plan) limitée par deux demi-droites de même origine ».

Aucune des deux « n'a vrai » ou « n'a faux » ! Et ne comptez surtout pas sur moi pour vous affirmer du haut de ma suffisance que je détiens la vérité ! D'autant moins que durant des années j'ai considéré qu'un angle *(au sens du collège et du lycée parce qu'après, un angle est défini très différemment !)* était une frontière, pas un territoire : ce n'est qu'en écrivant « donc, d'après » – et après des heures de combat avec moi-même – que j'ai basculé vers le territoire.

Pourquoi ?



Au départ, pour lever une ambiguïté : quelle est la mesure de cet angle ?

Bien sûr, ce n'est pas une raison suffisante :

après tout, il suffit de décider d'appeler « secteur angulaire » chacune des deux surfaces limitées par « l'angle-frontière »… et de décider que c'est cette surface qu'on observe.

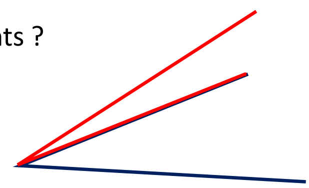
Mais ça nous oblige bien à porter en priorité notre regard sur une surface (un territoire) :

un secteur angulaire, son angle (frontière), son sommet et ses côtés !

[*Un angle (frontière)*, son secteur angulaire, etc.… serait ambigu : *quel* secteur angulaire ?]

Et si maintenant je décide qu'un angle est un territoire ? Alors la question n'est plus ambiguë : je *dois* préciser un des deux territoires. Et les mots angle, sommet, côté suffisent, plus besoin d'un « secteur angulaire » !

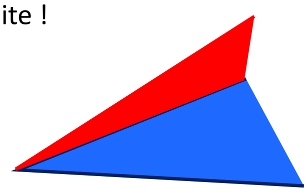
Et puis je suis tombé sur une autre question : les angles bleu et rouge sont-ils adjacents ?



– Euh, je dirais oui… mais après l'épisode 10, avec vous, maintenant je me méfie !

Bon, je vais prendre ça comme un compliment !

Et oui, vous avez raison de vous méfier, le angles-frontière ne sont pas adjacents : ce sont deux lignes et des lignes adjacentes ont exactement un point en commun… PAS une demi-droite !



Mais les angles-territoire, eux, oui, ils sont adjacents !
Parce que ce sont des surfaces, et des surfaces adjacentes ont bien une ligne en commun !

Alors si vous pensez que ces angles sont adjacents c'est que vous les voyez comme des surfaces !

– Vous n'avez pas l'impression que vous jouez un peu sur les mots, là ?

Pas du tout, c'est VOUS qui en avez l'impression 😊, j'ai juste l'impression d'utiliser un vocabulaire précis ! Vous savez, en maths c'est comme en français, les mots comptent ! Mais c'est vrai qu'il m'a fallu écrire « *donc, d'après* » pour en avoir pleinement conscience (et parfois, ça n'a pas été facile) ! D'ailleurs je crois que le plus simple est que je vous en recopie deux passages, celui-ci :

Première escale **:** les **frontières** de la géométrie.

En géographie politique, une frontière est une ligne qui entoure un État : les habitants de cet État doivent la traverser pour aller à l'étranger. Comme nous vivons à la surface de la Terre, ces frontières sont des lignes qui séparent des surfaces.

En géométrie, nous n'observons pas seulement des surfaces. Alors, nous avons trois types de frontières :

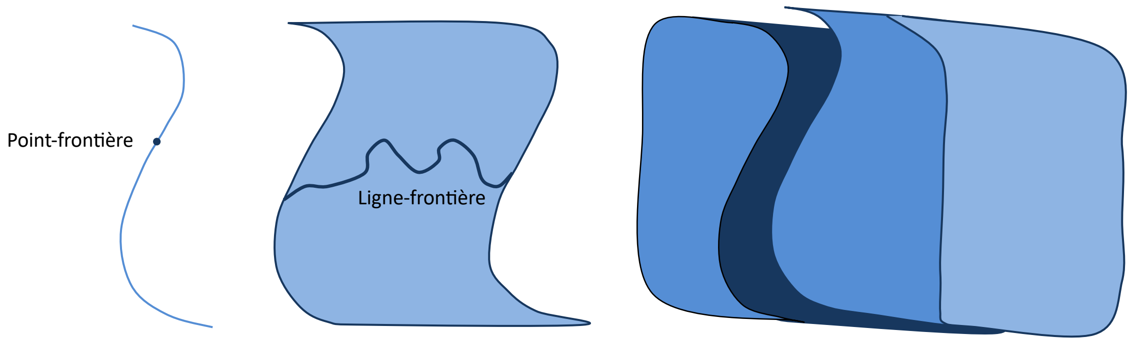
un point peut être une frontière entre deux parties d'une ligne,

une ligne peut être une frontière entre deux parties d'une surface,

une surface peut être une frontière entre deux parties d'un solide.

lorsqu'un point, une ligne ou une surface est une frontière, il est impossible à un objet ponctuel de relier un point d'une des deux parties séparées à un point de l'autre partie, sans traverser cette frontière.

Impossible… Sans « tricher », c'est-à-dire en ne passant que par des points de la ligne, de la surface ou du solide observé !



Surface-frontière :
j'ai séparé les deux morceaux du solide pour que tu puisses voir la frontière… mais naturellement, tu dois imaginer que les deux blocs sont collés !

D-39 ***Frontière…***

d'une ligne : **point** qui sépare la ligne en deux lignes qui n'ont aucun autre point commun.

d'une surface : **ligne** qui sépare la surface en deux surfaces qui n'ont aucun autre point commun.

d'un solide : **surface** qui sépare le solide en deux solides qui n'ont aucun autre point commun.

L'extrémité d'une ligne, l'enveloppe d'une surface ou d'un solide sont également des frontières - entre la ligne, la surface ou le solide et… une extension quelconque de cette ligne, de cette surface ou de ce solide !

Une frontière peut être limitée… ou illimitée. Par exemple, une droite d'un plan sépare ce plan en deux demi-plans, dont elle est la frontière.

Source « Donc, d'après », p. 69-70

Et celui-là :

D-41 ***<u>Adjacent(e)s</u>*.**

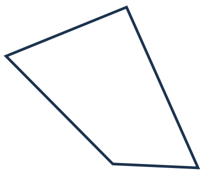
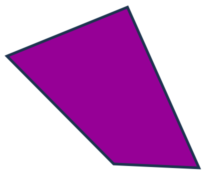
<u>Lignes adjacentes</u> : deux lignes qui ont la même frontière et aucun autre point commun.

<u>Surfaces adjacentes</u> : deux surfaces qui ont en commun une ligne qui fait partie de leurs frontières, et aucun autre point commun.

<u>Solides adjacents</u> : deux solides qui ont en commun une surface qui fait partie de leurs frontières, et aucun autre point commun.

*Juste comme ça, je vous rappelle que si vous cliquez sur **<u>https://donc-dapres.com</u>** puis sur **Partie 1 :** <u>la base de la base</u> vous pouvez télécharger en PDF toute la première partie du livre (une centaine de pages)… dont ces passages ! Et non, il n'y a pas d'arnaque, c'est tout anonyme et tout gratuit, garanti sans « cookies ». C'est juste que j'aime bien partager 😊 !*

<u>Mais bizarrement, c'est une troisième raison qui m'a fait basculer de l'angle-frontière à l'angle-territoire</u> et là, vous pourriez vraiment dire que j'ai joué avec les mots – ou plus exactement avec l'étymologie des mots : dans mon livre, il m'a bien fallu définir « polygone » (vous savez : les triangles, quadrilatères etc.) mais devais-je le définir comme une ligne (un ensemble fermé de segments consécutifs – *oui, adjacents !* – d'un même plan) ou comme une surface : la partie du plan enfermée dans cette ligne ?

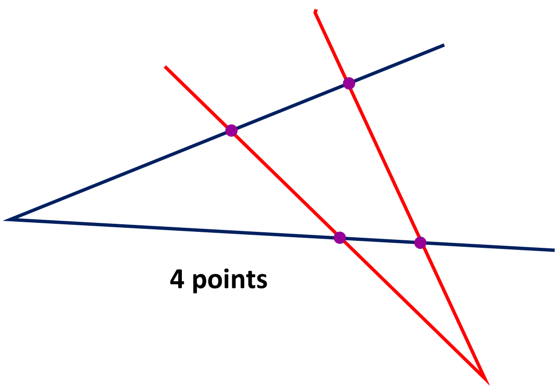
Un polygone : ça  ou ça  ?

Étymologiquement un « polygone », c'est (en grec) un « plusieurs–angles ». Et même si les Grecs ne manipulaient pas les opérations ensemblistes, il n'est pas ridicule de se poser la question : « plusieurs, au sens de quelle opération ? »

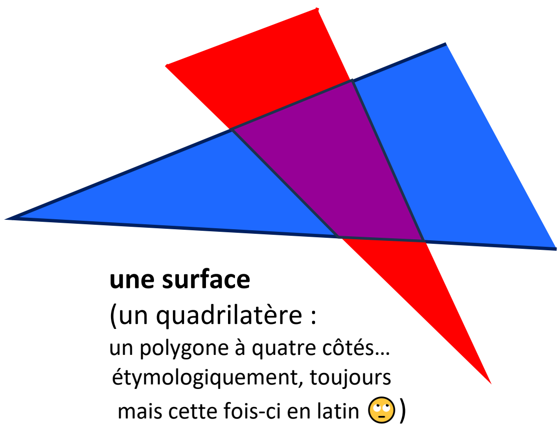
Certainement pas être au sens de la réunion : qu'on décide d'envisager un angle comme une ligne ou comme une surface, il s'agit d'un élément illimité - et la réunion d'éléments illimités est illimitée, alors qu'un polygone ne l'est pas.

L'intersection, alors ? Oui, mais à condition de décider qu'un angle est une surface !

Une intersection entre deux angles-ligne



une intersection entre deux angles-surface :

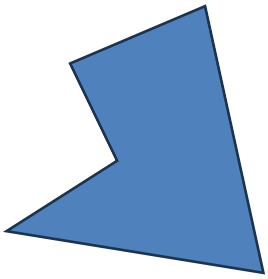


Et là, bien sûr tout s'enchaîne : pour qu'une opération entre deux angles crée un polygone, il faut que ces angles soient des surfaces – et que l'opération soit une intersection… donc le résultat sera également une surface.

Conclusion <u>personnelle</u> : il m'a semblé logique de définir un polygone comme une surface ce qui rétrospectivement m'a contraint à définir un angle également comme une surface !

– Ah mais non, là je ne suis pas d'accord !

Un polygone comme celui-ci :
comment vous faites pour le créer
par intersection d'angles ?

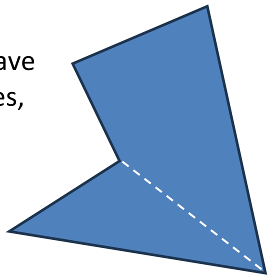


Bien joué ! Je ne fais pas : je n'avais pas du tout l'intention d'approfondir les polygones dans cet épisode (*« à l'origine des angles » !*) Mais tout de même, en quelques lignes :

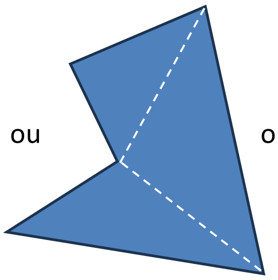
je les sépare en deux catégories : les polygones convexes (ceux que j'obtiens par intersections d'angles)
et les polygones concaves (ceux qui ont un… ou plusieurs » creux »).

Les polygones convexes sont les briques élémentaires de tous les polygones :

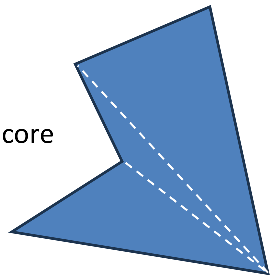
vous pouvez toujours décomposer un polygone concave en plusieurs polygones convexes, par exemple ici :



ou



ou encore



Et le tour est joué :

tout polygone est soit un polygone élémentaire,
soit une réunion de polygones élémentaires

(et oui, bien sûr, les plus élémentaires des polygones élémentaires sont les triangles !)

Voilà pourquoi il m'a bien fallu admettre que définir au collège les angles comme des surfaces était plus efficace, plus prometteur que les définir comme des lignes. Mais ça n'a pas été sans résistance de ma part. Et comme je l'ai déjà écrit, d'autres convictions sont tout aussi raisonnables : ne comptez pas sur moi pour vous affirmer du haut de ma suffisance que je détiens la vérité !

(Je suis d'ailleurs moi-même pris au piège de l'étymologie : au bas de la page un de cet épisode, j'ai écrit :
l'ensemble des points de ce nouveau morceau d'univers (le « solide » qui nous reste) s'appelle un « angle dièdre ».
Oui mais … étymologiquement, « dièdre » signifie « deux plans » – c'est-à-dire les deux plans qui limitent le solide : une frontière, pas un territoire ! Rien n'est parfait 😁)

Alors finalement le plus important c'est peut-être d'arriver à se comprendre, non ?
Est-ce que sur Terre tout le monde parle la même langue ?