Philippe Colliard
[Qui je suis](#)

Les maths comme je les aime /9

Multiplier des points : Descartes… et les harpes

*Cet épisode est le dernier d'une série (/5 , /6 , /7 et /8) qui s'appuie très librement sur « les harpes de Thalès : **une approche géométrique des nombres** », un article que j'ai publié sur le site « Images des mathématiques (CNRS). Promis, le prochain épisode parlera de tout autre chose ! Pourquoi « très librement » ? Parce qu'ici je n'écris pas des maths, **je les raconte… comme je les aime** 😊. Juste comme je voudrais les partager. Mais bien sûr, fondamentalement ce sont les mêmes maths !*

De rien à… un peu plus : chaque nouvel épisode s'appuie sur les précédents pour raconter un peu plus de maths.

Multiplier des points… mais pas n'importe lesquels : nous travaillons toujours sur les points de la droite ***d*** que j'ai définie dans les épisodes précédents (cette droite passe par deux points distincts **A** et **B** que j'ai allumés dans un espace tout noir. J'ai appelé le point **A** « point origine d'une graduation géométrique de ***d*** », et le point **B** « point unité » de cette graduation).

Bon, cette multiplication entre points va ~~peut-être~~ vraisemblablement vous dérouter…. mais vous le verrez, elle est très sérieuse. Là je vous la présente, et ensuite on en discute, d'accord ?

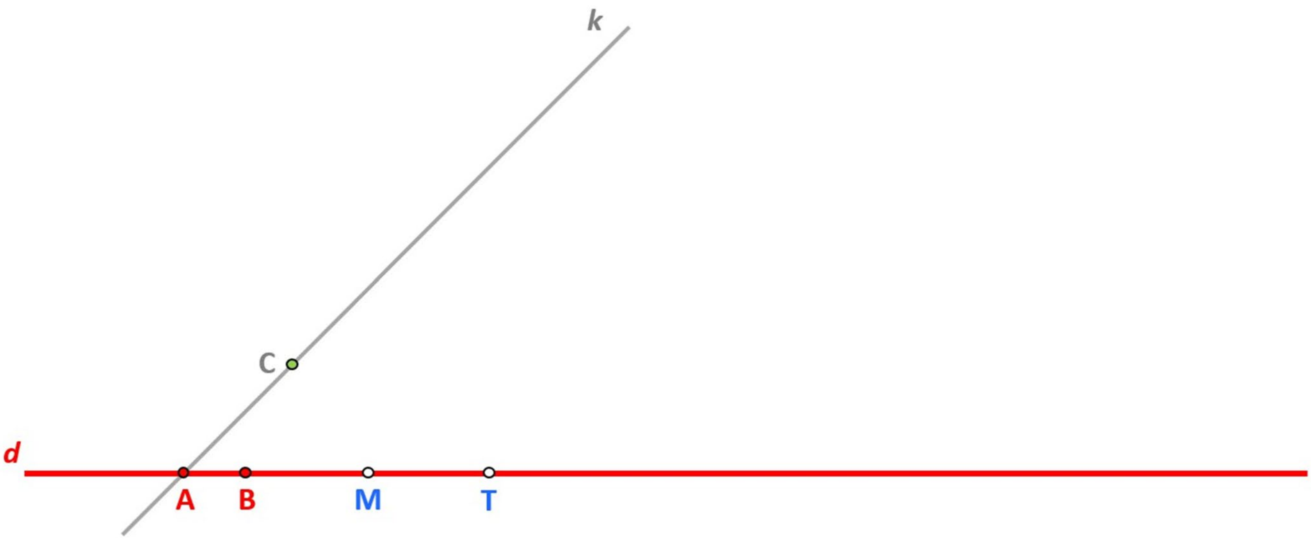
– Oui, d'accord (de toute façon on n'a pas le choix, c'est vous qui écrivez !), mais c'est pas très rassurant : déjà que votre addition entre points était un peu… bizarre ?

Je sais, je sais. Mais rappelez-vous, vous aviez fini par reconnaître qu'elle tenait la route. **On commence ?**

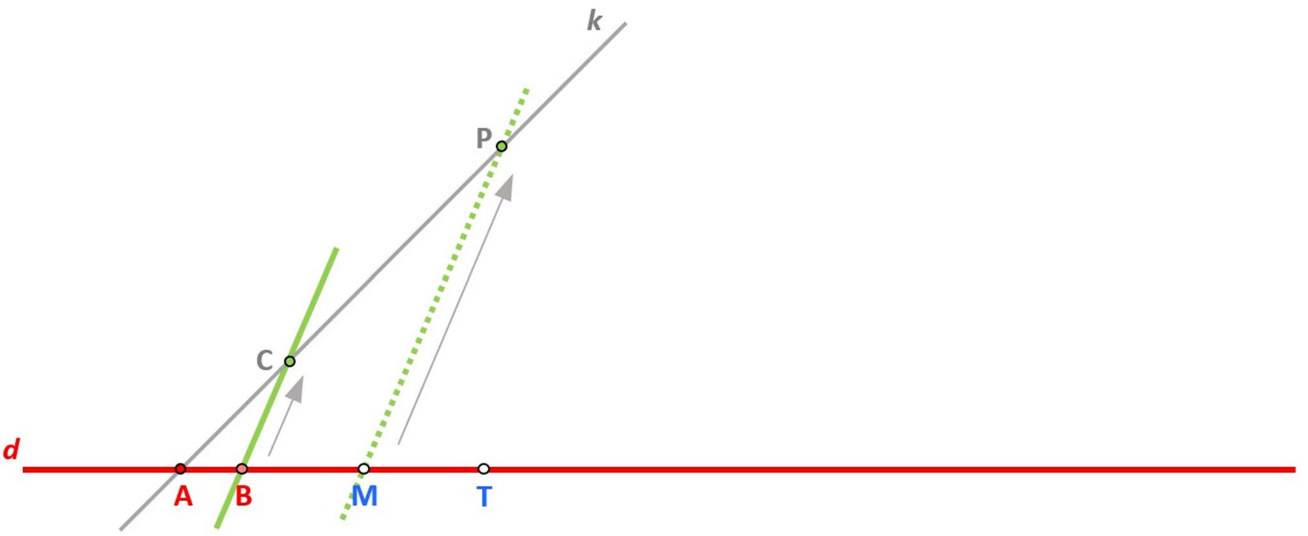
0 Je plante le décor : ***d*** , ses points origine et unité (**A** et **B**)… et deux autres points, **M** et **T**, que je choisis :

Ensuite, en quatre images (presque) sans paroles, la construction de M x N (oui, j'utilise le même signe que pour l'opération entre nombres, comme je l'avais déjà fait pour l'addition et pour les relations d'ordre) :

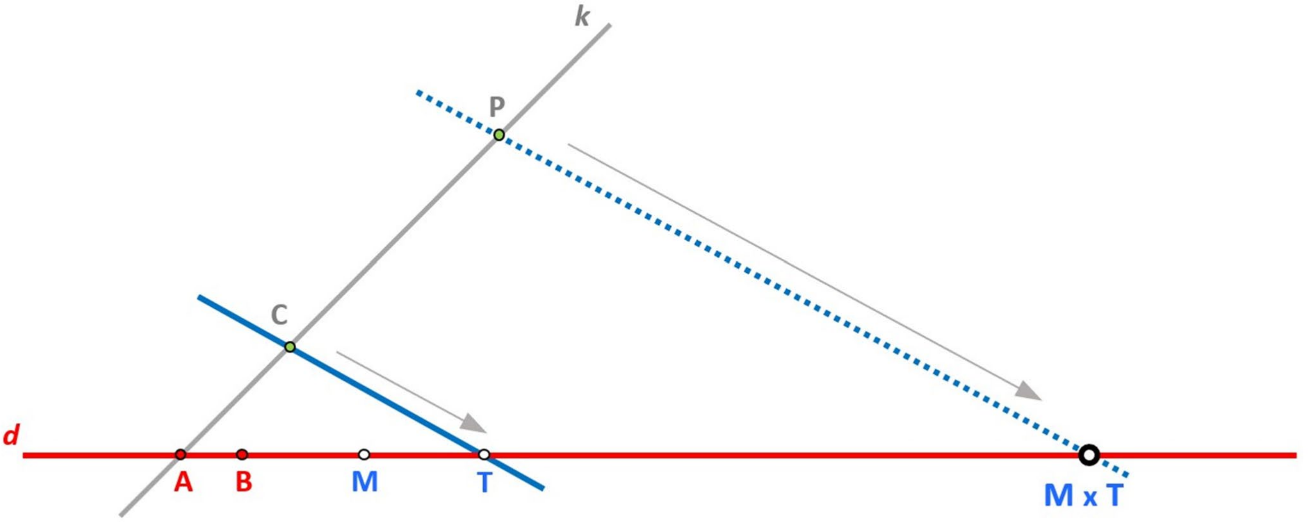
1 je choisis un point **C** en dehors de ***d*** et je trace la droite **(AC)** - (je l'appelle ***k***) :



2 je trace la droite **(BC)** puis sa parallèle qui passe par **M**. J'appelle **P** le point d'intersection entre cette droite et ***k*** :

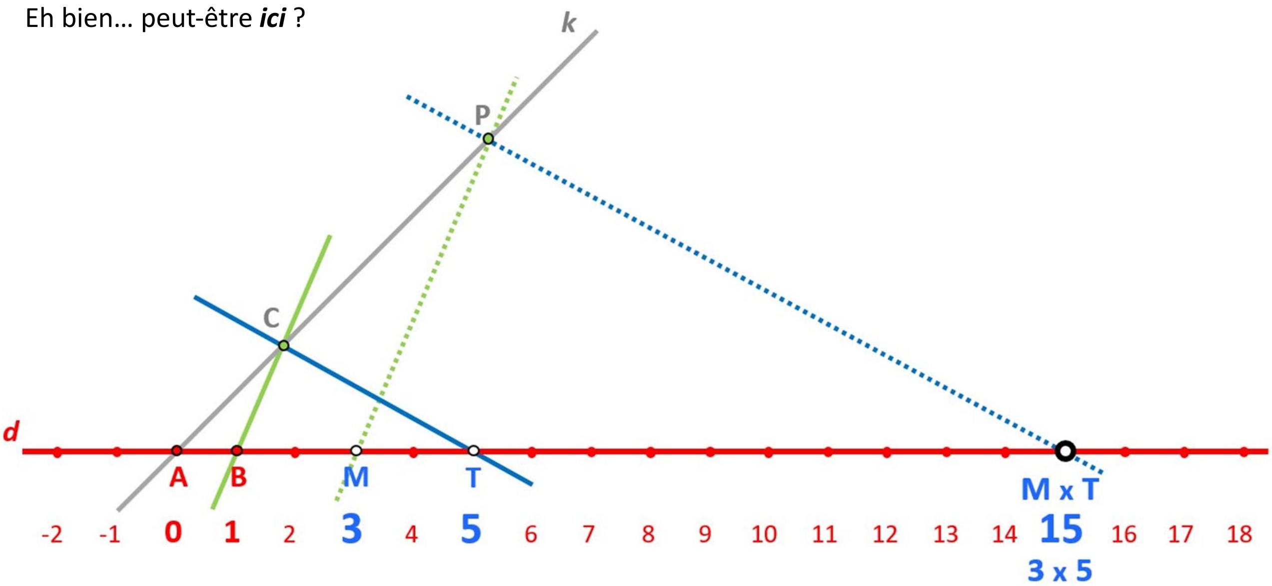


3 je trace la droite **(CT)** puis sa parallèle qui passe par **P**. **M x T** est le point d'intersection entre cette droite et ***d*** :



*– Euh, vous avez **décidé** d'appeler M x T le résultat d'une construction **perso** à partir de M et de T, c'est ça ? Bon, c'est toujours vous qui écrivez, alors pourquoi pas ? Mais vous auriez aussi bien pu l'appeler M*T ou inventer n'importe quel autre signe, c'est juste **votre** décision ! Où est ce qu'il est, le lien avec la multiplication, **la vraie** ?*

😄 Eh bien… peut-être ***ici*** ?



Bon, avant que les esprits ne s'échauffent et qu'on me traite de plagiaire je devrais peut-être préciser que cette multiplication n'est *évidemment* pas de moi :

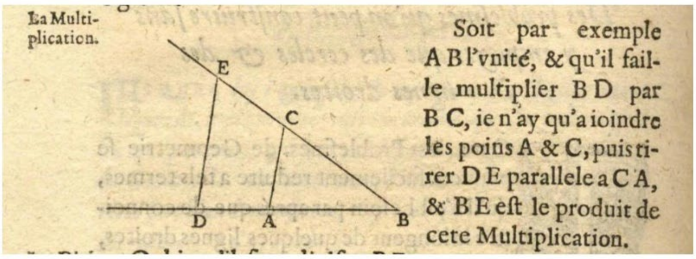
« mon » addition n'était qu'une application de la représentation géométrique classique d'une addition vectorielle, « ma » multiplication n'est qu'une application de huit lignes de « La géométrie » de Descartes (publié en 1637 🙂 !) et ma seule contribution est d'avoir étudié ces lignes dans le contexte des harpes de Thalès.


297

LA GEOMETRIE.

LIVRE PREMIER.

Des problesmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles & des lignes droites.



La Multiplication.

Soit par exemple AB l'vnité, & qu'il faille multiplier BD par BC, ie n'ay qu'a ioindre les poins A & C, puis tirer DE parallele a CA, & BE est le produit de cete Multiplication.

Sources : https://archive.org/details/46Descartes/mode/2up?view=theater

Mais pourquoi est-ce que je vous casse les p… euh, vous ennuie avec une nouvelle opération géométrique ?

– Oui, ça c'est vrai, pourquoi ?

Je sens comme une certaine ironie, là, non ?

Bon, écoutez, je vais essayer d'être rapide : vous vous rappelez sûrement tout ce qu'il vous a fallu apprendre pour pouvoir multiplier deux nombres ?

Entre nombres entiers positifs :	les tables de multiplication la « pose de la multiplication »
Entre nombres décimaux positifs :	la place de la virgule
Entre fractions positives :	la « règle de multiplication » (et les simplifications qui vont avec !)
Entre nombres relatifs :	ce qu'est la valeur absolue d'un nombre et bien sûr une « règle des signes » !

Ensuite, c'est vrai, il ne vous restait « plus qu'à » appliquer les bonnes formules… peu importait *pourquoi* !

Mais avec l'opération géométrique, *(presque)* plus rien de tout ça : juste une construction qui définit l'opération et qui s'applique pour TOUS LES POINTS, quelles que soient leurs abscisses (les nombres qui leur sont associés). TOUJOURS la même construction.

Et comme je vois bien que vous ne me croyez pas, je vous ai construit page suivante trois multiplications entre des points dont l'un au moins est négatif : des multiplications qui, si elles étaient entre nombres, vous obligeraient à utiliser la règle des signes !

– Pourquoi juste ces trois-là ? Et la multiplication entre deux points positifs, alors ?

Euh… vous voulez dire celle que j'ai donnée en exemple 😁 😁 ?

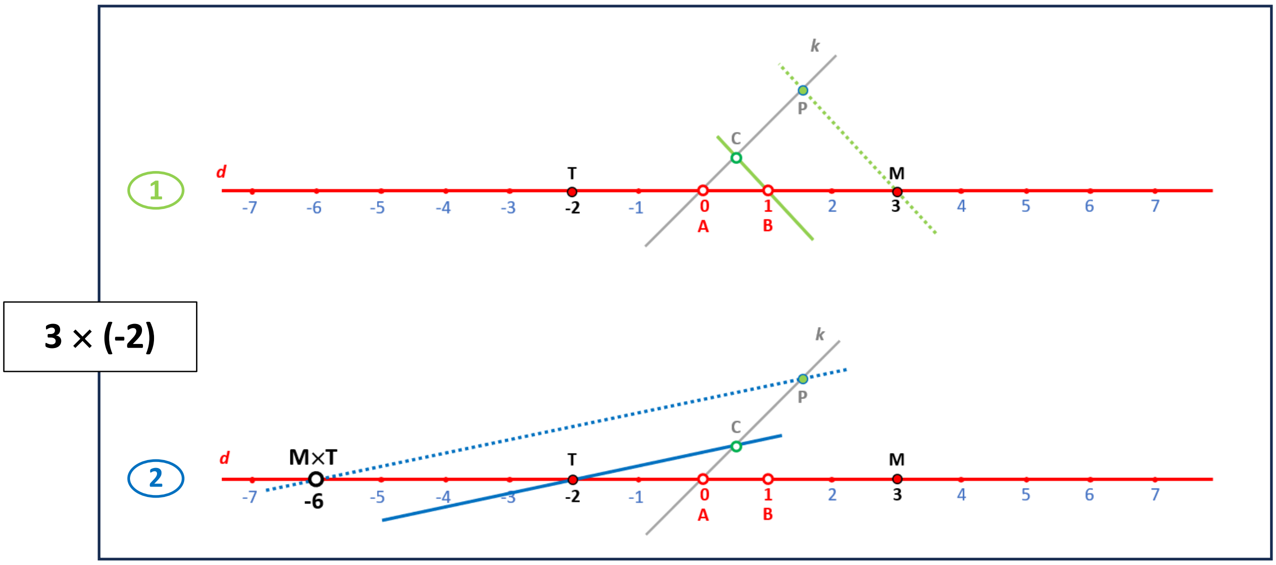
– Bon, d'accord, d'accord ! En même temps, c'est un peu facile, non ? C'est vous qui écrivez mon texte !

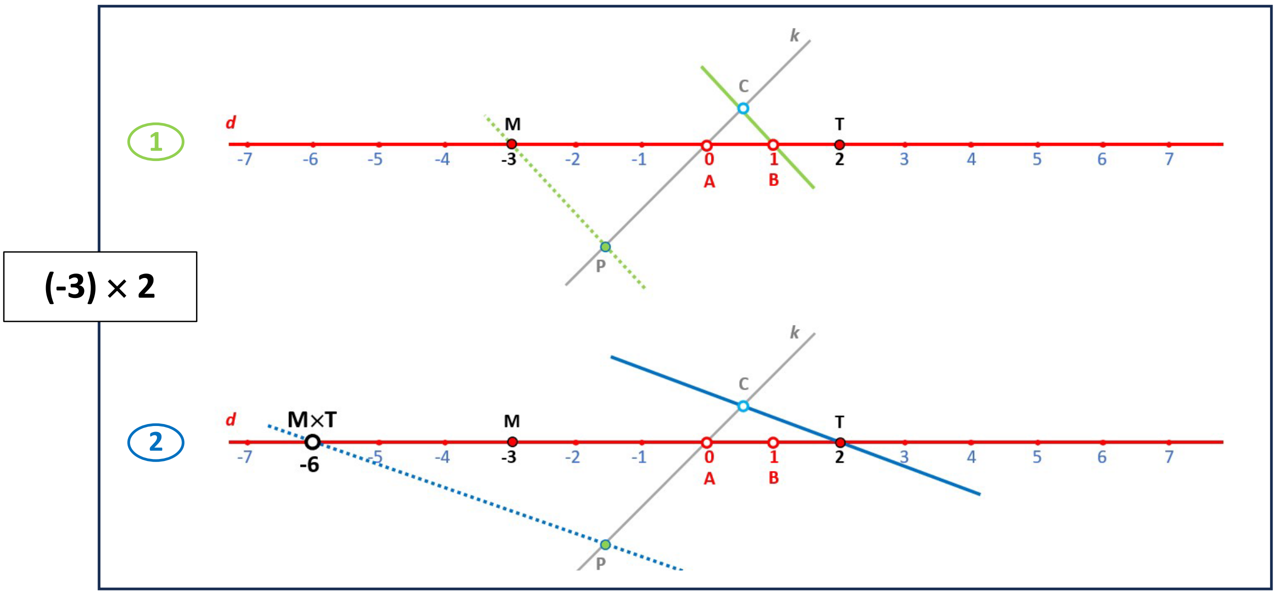
*Page suivante, pour ne pas alourdir les dessins je n'ai multiplié que des points entiers, je les ai toujours appelés **M** et **T** (même si bien sûr ce ne sont pas les mêmes) et à part **A** et **B** je n'ai nommé les autres points entiers de **d** que par leurs abscisses.*

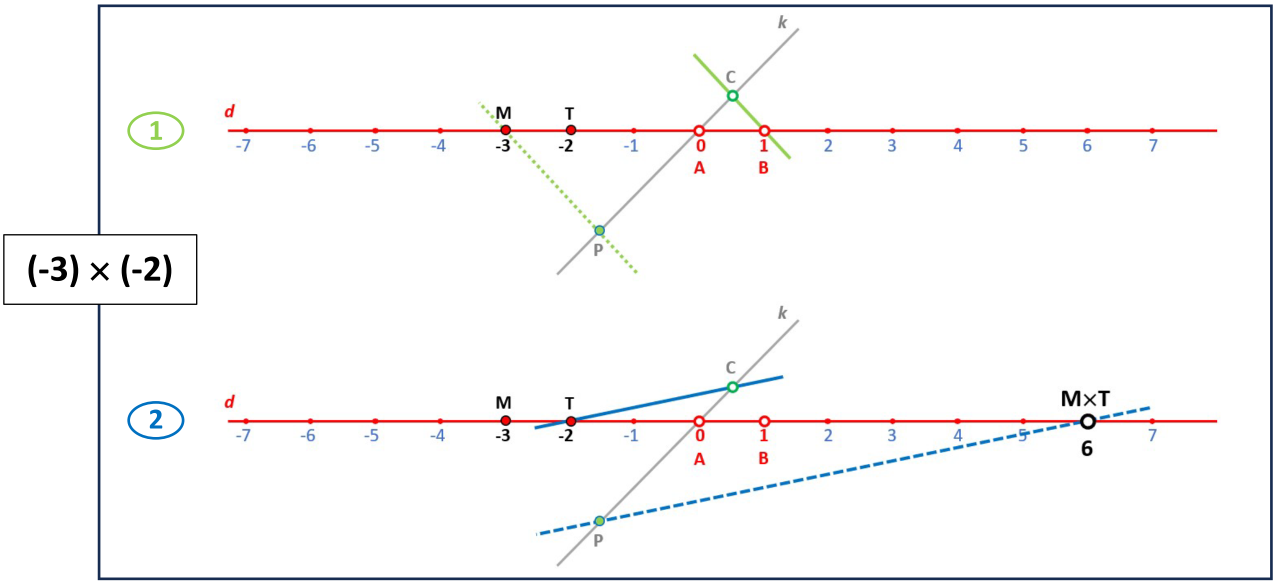
Regardez… dans tous les cas c'est bien *la même* construction :

(1) je trace la droite passant par **M** et parallèle à (**BC**) : elle coupe ***k*** en **P**

(2) puis je trace la droite passant par **P** et parallèle à (**CT**) : elle coupe ***d*** en « **M×T** »







Alors… vous me croyez, maintenant ?

– Oui, oui, on vous croit ! Mais dans la pratique, ça nous apporte quoi ? Comment vous faites pour marquer ***exactement*** *sur votre droite des points dont les abscisses ne sont pas entières ? Et le résultat, comment vous faites pour connaître* ***exactement*** *son abscisse ?*

– Oui, c'est vrai ça ? Et aussi comment vous faites votre construction si vos deux points sont très loin sur la droite ?

Oui, évidemment, à un moment vous devrez tout de même mettre vos « lunettes à abscisses » pour marquer **M** et **T** ou pour lire l'abscisse du « point produit »… rien n'est parfait !
Et pour les points « très loin », et bien… je ne fais pas 😊 !

Dans les deux cas, je pourrais vous répondre que j'utilise comme « lunettes à abscisses » l'axe des x d'un logiciel comme « GeoGebra » : je m'en sers pour marquer les points **M** et **T**… puis je l'oublie le temps d'appliquer ma construction purement géométrique… puis je l'utilise à nouveau pour récupérer l'abscisse du point produit que j'ai construit !
Mais bien sûr ce serait tricher, d'une part parce que dans ce genre de logiciel, la plupart des abscisses ne sont que des valeurs approchées – évidemment tout de même très fines ! – de « vraies » abscisses que le logiciel ne saurait pas manipuler. Mais surtout parce que dans ces logiciels, les constructions « purement géométriques », ça n'existe pas (derrière la construction il y a un tas de calculs avec des nombres… et je suis bien placé pour le savoir, il y a très longtemps j'ai conçu le cœur du logiciel d'architecture *Vectoria 2D pro*, à l'époque le petit frère français d'AutoCAD. Souvenirs… souvenirs 🙂)

– Alors vous voyez bien qu'en vrai, votre construction on ne peut pas s'en servir !
Donc… pourquoi vous nous cassez les p… euh, ennuyez avec ?

Bon, j'y vois plein de raisons mais vous pouvez tout à fait ne pas les trouver valables, on ne va quand même pas se fâcher pour ça ? En vrac :

parce que cette construction, je la trouve belle,

parce que même si, dans la pratique elle ne l'est pas (pratique ! 😁), elle est l'un des éléments importants d'une approche des nombres bien plus simple que celle qui s'appuie sur des extensions successives d'ensembles particuliers de nombres,

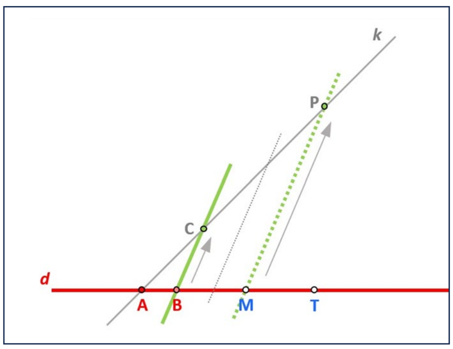
parce qu'y démontrer (par la géométrie !) les propriétés de l'addition et de la multiplication y est simple, limpide, presque une évidence (NON, je ne le ferai pas ici, ce n'est pas l'endroit. Vous le savez bien, ici **je *raconte*** *les maths… comme je les aime* !)

et enfin (surtout ?) parce que ce n'est pas une simple règle à apprendre par cœur. On peut comprendre les racines de cette construction, elle *donne son sens* à la multiplication numérique.

– D'accord, on vous croit, ne vous fâchez pas ! On peut quand même encore vous poser une question ? La dernière ? Où elles sont les racines de votre construction ? Juste en racontant, bien sûr sans « faire des maths » ?

Qui a dit que je me fâchais ? Bon, juste en quelques mots, alors… et quatre dessins !

Je reviens sur le premier exemple de cet épisode (un point **M** d'abscisse 3 et un point **T** d'abscisse 5 de ***d***)
et j'en complète les dessins par des droites qui y font apparaître les cordes de *harpes de Thalès* qui y sont cachées :

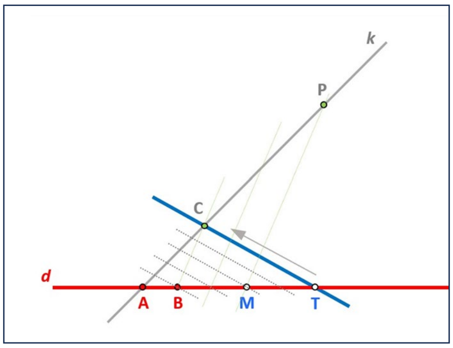


P est en quelque sorte un avatar de **M**… sur ***k*** :

Derrière **A** et **C** se cache une graduation géométrique sur ***k***, d'origine **A** et de point-unité **C**, et dans cette graduation, **P** *a la même abscisse (sur **k**) que* **M** *sur **d***.

Maintenant, regardez le triangle **AMP** : il suffit de rajouter une droite (en pointillés gris : elle passe par le point d'abscisse 2 de ***d***) pour y faire apparaître une *harpe de Thalès* qui sépare le segment [**AM**] en 3 segments congruents (« de même longueur ») … et qui sépare donc également [**AP**] en 3 segments congruents !

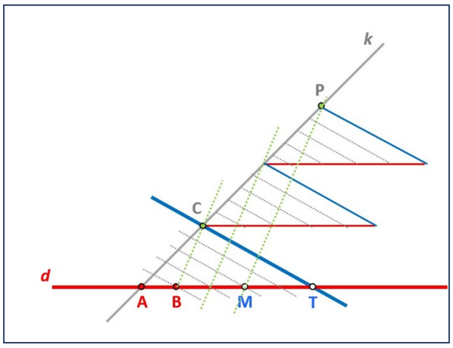
(Mais les « petits segments » de [**AP**] ne sont pas congruents à ceux de [**AM**])



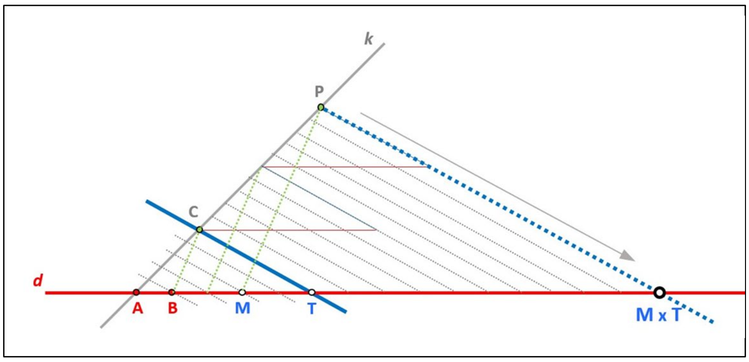
Et si maintenant je fais apparaître une *harpe de Thalès* dans le triangle **ATC** ?
Une harpe à qui il a fallu remettre toutes ses cordes !

Elle sépare le segment [**AT**] en 5 segments congruents
donc elle sépare également [**AC**] en 5 segments congruents !

(*Évidemment* 😁 si le triangle **ATC** n'est pas isocèle en A, les « petits segments » de [**AT**] ne sont pas congruents à ceux de [**AC**] !)



En m'appuyant sur le découpage de la première harpe
et en reproduisant le triangle **ACT** et sa harpe 2 fois entre **C** et **P**
je fais apparaître un découpage de [**AP**]
en 3 paquets de 5 segments chacun… tous congruents !



Après, bien sûr, c'est quasiment fini !

Tout ce qui me reste à faire,
c'est de prolonger les cordes jusqu'à la droite ***d***…

pour obtenir une troisième harpe de Thalès,
qui renvoie le découpage sur ***d*** : **3 paquets de 5 segments**, tous congruents.

Et j'arrive au point-produit 🙂 !

Je vous l'avais dit, (presque) pas de maths… juste des dessins !