



Philippe Colliard
[Qui je suis](#)

To read this episode in English, click here →

Math as I like it ... and as I tell it! 😊

Tous les épisodes publiés : <https://www.lesmathscommejelesaime.fr>

Les maths comme je les aime /2



Vous tracez une ligne ou un trait ?

Bon, il me semble avoir suffisamment insisté sur l'objet ponctuel, non ?

Mais ce n'est pas seulement parce que je suis monomaniacque, c'est également parce qu'il est à l'origine de notre géométrie euclidienne. Je l'ai écrit dès le premier « voyage » de « [donc, d'après](#) » :

pour commencer notre géométrie, je devais inventer ou l'objet ponctuel, ou le point... l'autre suit assez simplement. J'ai choisi d'inventer l'objet ponctuel, parce qu'il me semble plus facile d'imaginer la réduction d'un objet que celle d'un endroit.

*Maintenant que nous savons ce qu'est un objet ponctuel – et ce qu'est un point – nous allons pouvoir passer à la question suivante : **qu'est-ce qu'une ligne ?** (Noooooon, ce n'est pas un trait, pas plus qu'un point n'est une tache !)*

Vous vous rappelez [loran](#) et [Opa](#) , le mage et l'Atlante devenus objets ponctuels ?
Quand ils se déplacent ils traversent un ensemble de points : c'est ça, une ligne !

Une ligne est le trajet d'un objet ponctuel en déplacement (l'ensemble des points qu'il traverse).

[J'entends déjà une question là-bas au fond : *c'est quoi un ensemble ?*

D'accord : pensez à la fois à cette page que vous lisez, à l'heure qu'il est et à votre meilleur(e) ami (e) : votre pensée est peut-être le seul lien entre ces trois objets()... mais elle vous donne une idée de ce qu'est un ensemble.*

Ce n'est qu'une image, évidemment : un ensemble est comme une pensée à propos d'objets. Vous pouvez vous intéresser à des ensembles farfelus en y rassemblant, comme je l'ai fait, des objets qui n'ont pas grand-chose de commun – ou vous pouvez observer des ensembles dont les objets sont tous du même type : par exemple... des ensembles de points 😊 !

() Au sens mathématique du mot « objet », plus vaste que le sens physique : à peu près tout ce qui peut être défini sans ambiguïté. Les « vrais » objets, bien sûr, mais aussi les êtres vivants et même le rêve que vous avez fait hier matin juste avant de vous réveiller – même si vous ne vous le rappelez plus !]*

Une ligne, donc, est un ensemble de points... qui sont des endroits. Et un ensemble d'endroits est aussi un endroit donc **une ligne est un endroit** : on peut l'occuper ou la traverser mais ni la saisir, ni la déplacer... **ni la tracer** 😊 !

Si loran ou Opa – en mode brillant – se déplaçaient suffisamment rapidement vous auriez l'impression de voir une ligne brillante mais bien sûr ce n'est pas vrai : un endroit ça ne brille pas. Vous seriez juste victime de la persistance rétinienne, à chaque instant il n'y aurait bien qu'un seul point éclairé (mais nous n'allons pas nous embarquer sur « l'effet phi », ça nous emmènerait un peu loin) !

Et un trait, alors ? C'est juste un bricolage humain qui nous permet de nous faire une idée d'une ligne particulière. Une idée très grossière mais nous n'avons pas le choix. Toutefois, si nous voulons « penser juste » il est tout à fait nécessaire de garder en tête qu'une ligne et un trait, ce n'est pas du tout la même chose : la famille des lignes est une des grandes familles de classification des endroits géométriques (avec celles des points, des surfaces et des « solides » – qui malgré leur nom ne sont encore que des endroits)... alors ça me paraît plutôt important de s'en faire une idée raisonnable !

Deux différences de nature entre une ligne et un trait :

-) **une ligne est un endroit, un trait est un objet** – un ensemble de particules de matière :

Râpez une mine de crayon sur une feuille de papier :

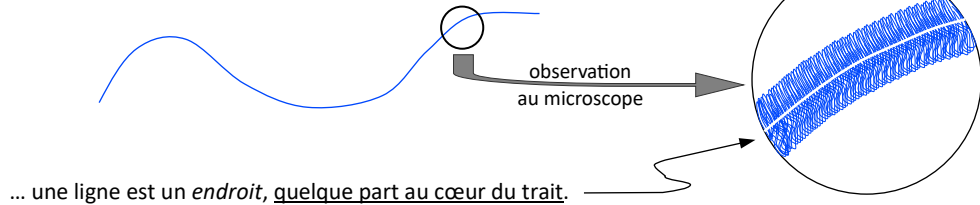
vous avez tracé un trait, en déposant de la poussière de crayon entre les fibres du papier.

Vous auriez également pu : imbiber la feuille d'encre – stylo : teinture des fibres, y incruster des particules d'encre solide (imprimantes à aiguilles), y projeter de l'encre liquide (imprimantes à jets d'encre), y faire fondre de la poussière d'encre, puis la sécher – photocopieuses, imprimantes laser...

... ou faire apparaître un trait sur toutes sortes de supports^(*), par toutes sortes de procédés : chimiques (photos), optiques (cinéma, laser), électroniques (télévision, moniteurs)...

^(*) Sans même parler du tableau noir sur lequel on râpe une craie dont la poussière se dépose - en partie ! - dans les creux du tableau !

Un trait est un *objet* : de la poussière de crayon...



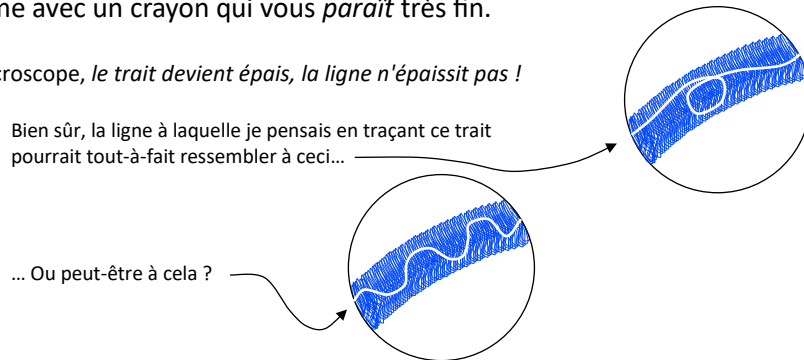
-) **Une ligne n'a pas d'épaisseur** – ou, ce qui revient au même, elle a l'épaisseur d'un point : le point est « *plus petit que petit* », la ligne est « *plus fine que fine* »).

... **un trait est épais** : lorsque vous tracez un trait pour attirer l'attention sur une ligne, c'est comme si vous passiez une couche de peinture sur la ligne avec un pinceau *infiniment* trop large pour elle. Vous occupez la ligne, évidemment, mais vous la débordez, vous barbouillez tout autour... même avec un crayon qui vous *paraît* très fin.

Au microscope, le trait devient épais, la ligne n'épaissit pas !

Bien sûr, la ligne à laquelle je pensais en traçant ce trait pourrait tout-à-fait ressembler à ceci...

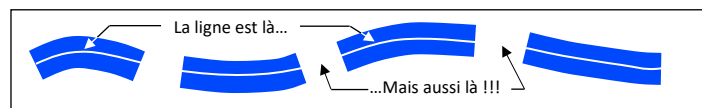
... Ou peut-être à cela ?



Mais les mathématiciens ont décidé que les traits qu'ils traçaient devaient donner une idée aussi claire que possible des lignes qu'ils représentaient. Alors restons simples !!!

Une dernière précision :

un trait tireté ne représente PAS une ligne tiretée. Ou alors vous devez le préciser !



Deux conséquences des différences de nature entre une ligne et un trait :

-) **Un trait est limité, une ligne peut ne pas l'être :**

étant une réalisation matérielle, un trait commence en un endroit, s'arrête en un autre.

La limite d'une ligne, elle, ne dépend que de notre imagination :

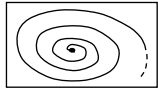
à nous de décider que l'espace dans lequel évoluent nos objets ponctuels est illimité (il ne s'agit donc pas nécessairement de l'univers tel que nous le connaissons mais d'une idéalisation de cet univers), à nous également de décider que ces objets ponctuels que nous avons inventés...

- ou bien peuvent se déplacer instantanément (oui, je sais... pas dans notre univers physique !)
- ou bien sont éternels (oui, je sais encore !)



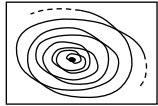
Nous pouvons « *facilement* » concevoir **une ligne limitée** :
c'est le trajet d'un objet ponctuel entre 2 points - ou d'un objet ponctuel qui revient à son point de départ (la ligne est alors « fermée »).

Un segment de droite, un arc de cercle, un polygone, un cercle, ou encore un trajet formé de 3 segments suivis de 2 arcs de cercles (mais nous ne connaissons pas encore tout ça !)



Une ligne illimitée est évidemment plus difficile à concevoir :
il nous faut par exemple imaginer un objet ponctuel *éternel* qui part à la découverte de notre univers idéal sans s'arrêter. Pas même dans 5 milliards d'années, lorsque notre soleil aura cessé de briller !

Une demi-droite ou une spirale simple (que nous ne connaissons toujours pas !) sont des lignes illimitées.



Nous pouvons même imaginer 2 objets ponctuels qui partent successivement du même point mais dans 2 sens différents. Nous concevons alors une ligne illimitée dans les 2 sens.

Par exemple une droite, bien sûr, mais aussi une spirale double, et beaucoup d'autres lignes.

Nous pouvons concevoir, nous pouvons imaginer... mais reconnaissez que ça demande *vraiment* de l'imagination ! C'est aussi ça, les maths 😊

-) Une ligne est formée d'un ensemble infini de points et un trait d'un ensemble fini de particules :

pour le trait, ça paraît raisonnable (même si ces particules peuvent être très nombreuses).

Et pour la ligne ?

Tout d'abord, ne confondez pas « ligne limitée » et « ligne finie » :

limitée veut dire que la ligne a deux points qui l'arrêtent...
ou qu'elle est fermée !

finie signifierait que vous pourriez compter les points qui la composent. Les compter jusqu'au dernier !

Et ça, ce n'est pas possible : même une ligne limitée est composée d'une infinité de points !

Comment savons-nous qu'aucune ligne n'est finie ?

Facile : Choisissez une ligne, puis 2 points de cette ligne...

2 points *différents* – donc 2 points séparés (*s'ils n'étaient pas séparés, cela voudrait dire qu'aucun microscope, même hyper-puissant ne permettrait de les distinguer. Vous auriez simplement choisi 2 fois le même point*) :

Existe-t-il au moins un autre point de cette ligne, entre les 2 que vous avez choisis ?

Oui, sinon, comment un objet ponctuel passerait-il du premier point au deuxième ?
Bon. Vous aviez choisi "point 1" et "point 2", et vous voici maintenant avec "point 3", *entre* "point 1" et "point 2"...

et maintenant :

existe-t-il au moins un autre point de la ligne, entre "point 1" et "point 3" ?

Je suppose que vous devinez la suite ?

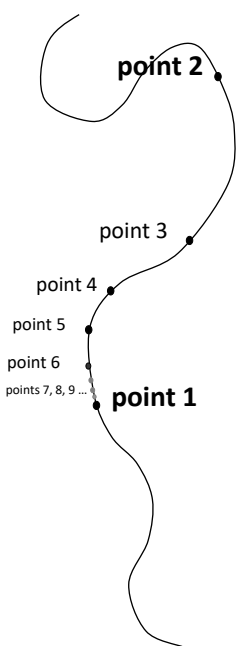
Vous vous retrouvez avec "point 4", "point 5", "point 6"...

et ça ne s'arrêtera jamais : mais NON, vous ne retombez pas sur "point 1", vous pourriez le « vérifier » en utilisant des microscopes de plus en plus puissants !

Et si vous avez déjà utilisé le plus puissant des microscopes ?

Cela ne prouve que les limites de notre technologie :

imaginez un microscope parfait !



Il me semble l'avoir déjà dit : la géométrie est avant tout une affaire d'imagination 😊

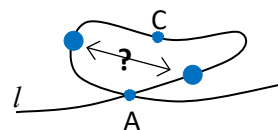
Peut-être avez-vous remarqué l'apparition très discrète du mot « entre » ? C'est un de ces mots qui paraissent tout simples... tant qu'on ne creuse pas ! Et non, je ne vais pas vraiment creuser, juste gratter un tout petit peu le sol :

si A, B et C sont trois points d'une ligne l , et si cette ligne l ne passe qu'une seule fois par A et C, alors « B est un point de la ligne l , entre A et C » signifie que :

un objet ponctuel qui se déplace en allant de A à C, sans quitter la ligne l , traverse B.



... mais si la ligne l passe plusieurs fois par A et C, « entre A et C » n'a plus de sens précis :



Peut-être avez-vous également remarqué qu'en aucun endroit de cet épisode je n'insiste sur l'idée que l'espace de points que nous imaginons est complet (le plus près que je m'en approche est dans la création, ci-dessus, du « point 3 » :

« sinon, comment un objet ponctuel passerait-il du premier point au deuxième ? »)

Un peu de patience, cela viendra, bien sûr. Mais pas encore tout de suite : il me paraît fondamental, dès ces premiers billets, de mettre en lumière l'infini **au moins** dénombrable de notre espace de points : comme David Bessis me l'a gentiment fait remarquer un jour au cours d'une rencontre imprévue, mes « objets ponctuels » tels que je les raconte (épisodes [1](#), [1a](#) et [1b](#)) sont **des objets limites** – et les points sont également **des points limites**, des endroits que seuls des objets ponctuels peuvent occuper sans en déborder !

L'axiome de l'intégrité linéaire de Hilbert, la puissance du continu viendront en leur temps... et très naturellement ! Mais là nous balbutions encore, il faut leur préparer le terrain : ne pas tout dire tout de suite mais également ne rien dire de faux, ne pas nous enfermer dans une vision étriquée de notre espace de points !

Je souhaite avant tout partager : en cliquant sur les couvertures vous accédez (entre autres) à de nombreux extraits de mes livres !

Oui, c'est gratuit... et non, il n'y a aucun piège commercial, aucune demande de renseignements.

Si toutefois vous cherchez à acheter un de ces livres, [cliquez ici](#).